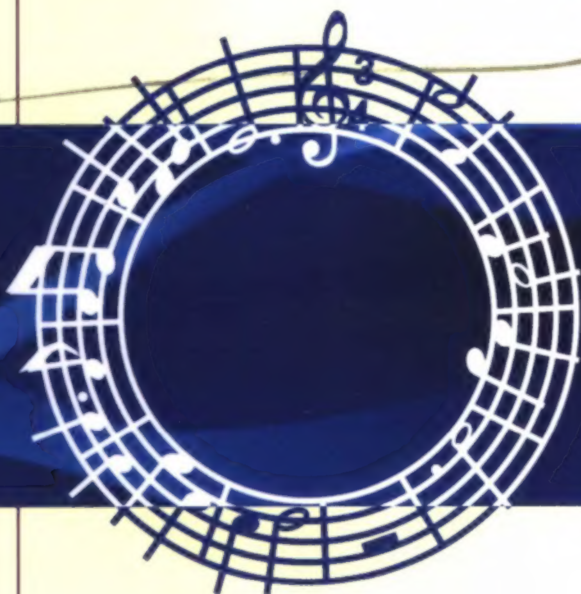
朱梧槚 著

数学与无穷观的逻辑基础

THE LOGICAL FOUNDATION OF MATHEMATICS AND INFINITY





大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS





ISBN 978-7-5611-4031-4

9 787561 140314 >

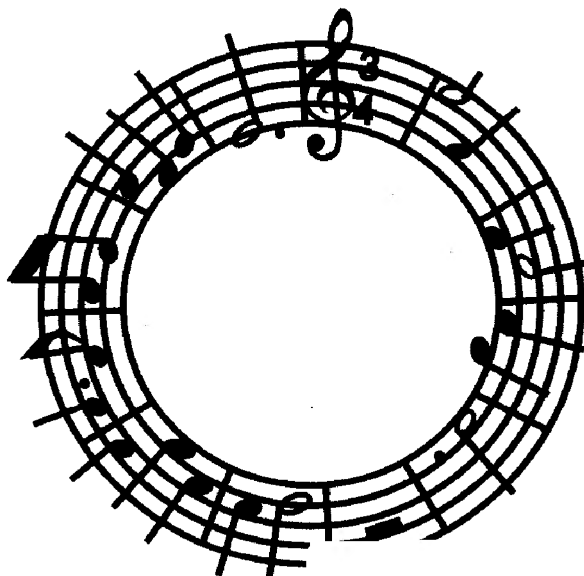
定价：45.00元

01-0/36
2008

朱梧槚 著

数学与无穷观的逻辑基础

THE LOGICAL FOUNDATION OF MATHEMATICS AND INFINITY





大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学与无穷观的逻辑基础/朱梧槚著. —大连:大连理工大学出版社,2008.3
ISBN 978-7-5611-4031-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. 朱… Ⅲ. 数学理论 Ⅳ. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 037157 号

大连理工大学出版社出版
大连市软件园路 80 号　邮政编码 116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连金华光彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm　印张:20.75　字数:318 千字　插页:3
2008 年 3 月第 1 版　2008 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦　梁　锋　责任校对:黎　玉
封面设计:宋　蕾

ISBN 978-7-5611-4031-4　定价:45.00 元

序

本书内容的主题是研讨包括无穷观在内的数学基础问题."数学基础"是20世纪上半叶所诞生的一个数学分支学科,该学科专门研究如何为古今种种数学系统奠定其理论基础的问题,或者说如何为种种数学系统奠定其逻辑基础的问题.20世纪30年代以后的相当一段时期内,形成了数学基础热.随着时间的推移,数学基础热逐渐降温直至几近冰点.然而不要忘记,数学基础这一分支学科自从诞生之日起,就必定成为数学之存在和发展中的一个永恒的研究课题.

在此还应指出,本书内容的核心主题是研讨无穷观问题,而无穷观问题的研究和争论不仅由来久远,而且广泛涉及数学、计算机科学、逻辑学和哲学等众多领域,"有一种观点认为数学是关于无穷的科学,…,事实上,如果没有无穷的概念,我们很难看出数学如何存在."(Eli. Maor 著,王前等译,无穷之旅——关于无穷大的文化史,上海教育出版社,2000年,3~4).本人有兴趣于思考无穷观问题已近半个世纪(详见下文),也曾计划要写一本属于数学基础领域中关于无穷观之逻辑基础的书,但该书又必须从数学历史之源头上写起,因而在忙碌不堪的境况下,迟迟不能使计划实现.后来时机终于成熟,也终于有机会(详见后记)能完成计划并出版《数学与无穷观的逻辑基础》一书了.

本书内容分三篇,共7章,外加一个附录,具体章节内容如下:第一篇共1章,讨论几何基础问题.本章首先从基础角度切入,Euclid是历史上第一个提出几何根据的学者,并由此而使得他的事业受到人们的尊敬和高度评价,而且《几何原本》是2000多年来一直被公认为用

严格的逻辑结构陈述学科的典范. 其次，由无穷观的角度切入，可谓从Euclid的实体公理化到Hilbert之形式公理化（直至Лобачевский几何系统），无穷概念是深度扎根于欧氏几何与非欧几何系统中的，不仅系统中众多定义和公理的陈述离不开无穷，而且离开无穷连几何基本元素与基本关系都无法认知其直观. 第二篇共4章，其中第2、3、4章讨论精确性经典数学奠基问题. 在这里，从微积分开始，到古典集合论的建立和近代公理集合论的诞生，以及数学基础诸流派的形成，可谓无处不在讨论数学系统的逻辑基础，也无处不在涉及无穷观问题. 第5章讨论模糊数学的奠基问题，其中包括奠基方案之一的中介逻辑演算和中介公理集合论在内，同样可谓处处都有无穷又处处涉及逻辑基础. 第三篇共2章，其中第6章主要讨论各种可数无穷集合与不可数无穷集合概念的相容性问题，而第7章主要是讲潜无限数学系统的逻辑基础与集合论基础，同时也论及重建实无限数学系统的初步构想. 全书最后还有一个附录，题目是“Hegel论消极无限与积极无限”.[189]

在这里，请允许我用科普语言，从历史的角度向读者描绘一下本书第三篇内容的渊源和究竟做了一件什么样的事情，借以引起大家的兴趣.

大家知道，19世纪Cantor创建了古典集合论，从而为整个经典数学提供了一个共同的理论基础，尤如为整个数学大厦奠定了墙基. 然而，人们很快发现古典集合论中出现了各种自相矛盾的东西，人们称之曰悖论. 就像在数学大厦的墙基上发现了这样那样的裂缝. 后经许多数学家的共同努力，在改造古典集合论的基础上，建立了近代公理集合论，使得在古典集合论中所出之种种悖论都不在近代公理集合论中出现. 这就是说，那些在数学大厦墙基上所出现的裂缝已被全部修补完整. 亦即整个数学大厦有了一个无裂缝的相对牢固的墙基，但也未能从理论上证明这个当前无裂缝的墙基今后永远不会出现新的裂缝. 这就是说，虽然在近代公理集合论中能避免历史上已经出现的悖论，却又无法证明今后一定不会有新的悖论在其中出现. 近代公理集合论有几种版本，其中显得较为自然而被广泛使用的一种版本叫做ZFC系统，该系统由Zermelo于1908年首先提出，后经Fraenkel等加以改进而建成. 本书第三篇第6章中对无穷观问题进行研究的结果，也没有发现数学大厦墙基上有什么新的裂缝出现，但却出乎意料地发现了墙基内部产生了隐性的裂痕. 就像一个人，从外表看似乎很健康，没有任何疾病的症状，但在CT或核磁共振的检测下，却发现其体内某些部位发生了病变，例如有什么肿瘤之类

的病灶. 那么无穷观问题的研究又是以怎样的方法或手段发现墙基内部存在隐性裂痕的呢？这种相当于CT或核磁共振的检测方法是：兼容两种无穷观的分析方法和潜无限不等于实无限的思想规定. 以上就是第6章内容的一个科普性的描绘.

然而数学大厦墙基内部发生了隐性裂痕一事，却迫使我们直接面对且亟待解决两个问题：其一是如何为近现代数学和计算机科学重新选择一个新的没有隐性裂痕的理论基础；其二是在什么解读方式下能全面保存近现代数学与计算机科学理论的所有研究成果. 我们为此而在本书第7章中建立了潜无限数学系统，借以直接面对和解决所说的两个亟待解决的问题. 最后还在第7章中重新审视了谓词与集合之间的关系，并对今后如何重建新的实无限数学系统提出了初步的构想.

在下文中，将言及本人思考无穷观问题的起因与过程. 1959～1961年间，我在阅读和学习恩格斯的《反杜林论》，其中有恩格斯语（后知该语已被誉为恩格斯名言）："无限纯粹是由有限组成的，这本身就已经是矛盾，可是事情就是这样."（恩格斯著，中共中央马恩列斯著作编译局译. 反杜林论. 人民出版社，1970年，第48页）①. 本人是为研究数学而学习哲学的，在此学习背景下，我很快就想出了恩格斯名言的一个数学模型，[155]这就是恰由全体自然数构成的集合：

$$N=\{x\mid n(x)\}\,(n(x)=_{\mathrm{df}}\text{“}x\text{ 为自然数”})$$
$$=\lambda:\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

N（或λ）是一个无穷集合，因而是一个无限性对象，然而这个无限性对象却纯粹是由有限序数（即$\forall n(n\in N\rightarrow n<\omega)$组成的. 从而由恩格斯名言可直接断言$N$（或$\lambda$）是一个自相矛盾的错误概念. 然而必须拿出一个严格的逻辑数学证明来，否则将是无稽之谈. 直觉地感到，就λ序列而言，着眼于序数，它永远是现在进行式，因而是潜无限；又着眼于基数，它是完成式，必须是实无限. 为之，必须彻底弄明白两种无穷观的区别和联系，并由此而陷入无穷观问题的思考. 将近半个世纪以来，一直断断续续地思考这个问题，一直没有放弃过这类问题的学习和思考，但由于种种历史的和现实的原因，直到2000年才下决心专注研究它，并组织"数学系统中的无穷观问题"的研讨班. 先后也有不少同行学者介入到讨论班中来，然而一些探索研究的结果，总是与现代主流思想或经典观念相冲突，再加上各种其他原因，讨论班成员先后自动退出并放弃此项研究，最

① 当年所读版本与笔记均于文革中散失，恩格斯语再从1970年新版中找到录下.

后只剩下我的两个博士生坚持与我切磋推敲一些细节，并承担了全部后勤工作. 这两个学生是南京大学现代逻辑与逻辑应用研究所的杜国平教授和南京工业大学信息科学与工程学院的宫宁生教授.

其实历史地说，我们也可在先师们的直觉判断中受到启发和教诲.

例如，莱布尼兹(Leibniz)指出过："所有整数的个数这一提法自相矛盾，应该抛弃."[156]396

又例如，自从古典集合论出现悖论以后，豪斯道夫(Hausdorff)就曾不胜感慨和直截了当地提醒大家说："这一悖理的使人不安，倒不在于产生了矛盾，而是我们没有预料到会有矛盾：一切基数所组成的集，显得是如此先验地无可置疑. 正如一切自然数所组成的集一样地自然可信，由此就产生了如下的不确定性，即会不会连别的无限集，亦即一切无限集，都是这种带有矛盾的似是而非的非集."[10][157]27

再例如鲁宾逊(Robinson)于 1964 年在"逻辑学、方法论和科学哲学"国际会议上所作大会报告时所发表的见解："关于数学基础，我的立场(见解)是基于如下的两个主要原则(或观点)：(1)无穷集合按任何词义来说都不存在(无论在实际上或理论上都不存在)，更精确地说，关于无穷集合的任何陈述或大意陈述都在字面上简直是无意义的. (2)但是我们还是应该如通常那样去从事数学活动，就是说当我们做起来的时候，还是应该把无穷集合当作似乎是真实存在的那样."[70]

Mores · Kline 说："有一句古老的忠告说：当心您的朋友，您的敌人自会留意. 在科学活动中，这句话的意思就是：怀疑明显的东西，这样您将能清除科学真理中那些含混不清的内容. 任何能对明显的东西进行挑战的人，必定是十分勇敢的英雄，因为人们会认为这种挑战是疯狂的行为."[156]432

由于自然数集合和无穷集合不仅是十分明显的东西，甚至可以说是众所周知的常识性的东西. 但在这里，我们应该坚信莱布尼兹、豪斯道夫和鲁宾逊都是十分勇敢的英雄，而绝不是什么疯子. 他们都有很高的数学修养，又都是历史上作出过重大贡献的大师级的数学家和逻辑学家. 因此，我们有理由相信他们如上的断言决不是什么不负责任的胡言乱语，而是一种直接领悟事物本质的直觉判断. 至于上述鲁宾逊之(2)，可能是暂时性的一种权宜之计.

实际上，徐利治老师是一个无穷迷. 早在 1948 年，他在英国剑桥大学留学期间就开始思考无穷观问题，并由此而促使他去研究连续统假设的不可确定性. 所以他思考无穷观问题足有半个多世纪. 20 世纪 50 年

代中期，他率先提出不断延伸原理（潜无限）和相对穷竭原理（实无限）[13]；20 世纪 80 年代，他又率先建立双相无限（一种兼容且统一两种无穷）的概念，并用于分析众多常用的数学概念.[158]后来他在无穷观的思考中专注于 Poincaré 注记和连续统结构的研究，所以他在连续统结构方面有其独创和独到的见解.[159]而我在无穷观问题的思考中却自始至终专注于相容性问题的探索. 最近 8 年来，我也曾利用一些学术会议或者专程前往某些高校作无穷观问题的研究报告，其间坚信这是不可能事件者有之，不予认同和理解的专家学者亦有之. 我为之深受鼓舞. 因为这正是一股促使我更为坚定并无所畏惧地继续前进的力量，何况这种情况既属正常，同时也可以理解，甚至这也是一种历史性的规律. 然而值得庆幸的是，在无穷观问题的研究进程中，所出现之每一个进展和每一项结果，总是先专程赶赴北京徐利治老师家中讲给徐利治老师听（均有录音与录像的记录）. 经他仔细审视后，均能予以理解、认同、支持和鼓励，在此谨向徐利治老师致以衷心感谢.

在这里，我还要向大连理工大学出版社的刘新彦和梁锋表示衷心感谢，他们不仅为了《数学与无穷观的逻辑基础》一书的出版付出了辛勤的劳动和给予了诚挚的帮助，特别是在出版的时间上给我提供了一个非常好的机会，那就是使我有机会以《数学与无穷观的逻辑基础》一书的出版来纪念 Zermelo 所创建之 ZFC 系统诞生 100 周年. 当然，我还要感谢我的妻子胡月琴对我事业上的支持和鼓励，婚后 28 年来，她为了家庭一直很辛苦.

最后应指出，由于时间匆促和个人水平有限，疏漏不妥之处在所难免，敬请读者和同行专家批评赐教，不胜感谢，余不一一.

朱梧槚

2008 年 2 月 8 日

于江苏宜兴蓝天小区寓所

目 录

第一篇 几何基础

第 1 章 几何基础历史概要与公理化方法/3

1.1 Euclid《几何原本》与第五公设问题/3

1.2 Лобачевский 的信念和品质/7

1.3 Hilbert 的 Euclid 几何公理系统/11

1.4 Лобачевский 几何公理系统/24

1.5 公理化方法/36

1.6 Лобачевский 几何公理系统的相对相容性证明/40

1.7 几何公理系统的独立性和完备性/52

第二篇 经典与非经典数学奠基问题

第 2 章 悖论与精确性经典数学的理论基础问题/57

2.1 古典集合论的诞生及其思想方法/57

2.2 何谓悖论/66

2.3 数学危机/73

2.4 二值逻辑悖论举例/80

2.5 非欧几何与数学基础问题/85

第 3 章 逻辑数学悖论在精确性经典数学中的解释方法/87

3.1 Zermelo 对悖论的解释方法/87

3.2 Russell-Ramsey 对悖论的解释方法/96

3.3 $N(3\leqslant n<\omega)$值逻辑悖论与无穷值逻辑悖论/107

3.4 悖论的成因与研究悖论的意义——Gödel 不完备性定理与悖论/120

第 4 章 数学基础诸流派/125

4.1 逻辑主义学派/125

4.2 直觉主义学派/130
4.3 历史的误解/142
4.4 Hilbert 主义学派/143
4.5 形式主义学派/147
4.6 关于 Hilbert 主义学派与形式主义学派的数学真理观/149
第5章 关于模糊数学的理论基础问题/151
5.1 模糊性与模糊数学/151
5.2 奠基于精确性经典数学之上的模糊数学/156
5.2.1 模糊拓扑/160
5.2.2 模糊代数/161
5.3 ZB 公理集合论系统/162
5.4 中介数学系统/174
5.4.1 两种谓词的划分与定义/175
5.4.2 集合的运算/176
5.4.3 谓词与集合/179
5.4.4 小集与巨集/182
5.4.5 MS 与 ZFC 之间的关系/184
5.4.6 逻辑数学悖论在 MS 中的解释方法/187
5.5 从计算机科学与数学研究的角度看中介系统的发展/190
5.5.1 中介系统目前的发展概况/190
5.5.2 中介系统的哲学背景/192
5.5.3 中介系统的思想原则/193
5.5.4 数学研究对象的再扩充/193
5.5.5 概括原则的修改问题/196
5.5.6 经典数学系统和中介数学系统之间的关系/196
5.5.7 中介系统在计算机科学中的应用前景/198

第三篇 无穷观问题探索

第6章 数学无穷与数学基础/203
6.1 两种无穷观的区别和联系/203
6.2 数学系统对两种无穷观的兼容性/210
6.3 数学系统中的一对互相矛盾的隐性思想规定/212
6.3.1 隐性思想规定之一/212

6.3.2 隐性思想规定之二/215
6.3.3 两点注记/217
6.4 Cantor-Zermelo 意义下的无穷集合概念的自相矛盾性/218
6.4.1 简记与注释/218
6.4.2 可数无穷集合的不相容性/220
6.4.3 ZFC 框架中的不可数无穷集合的不相容性/222
6.4.4 若干相关的历史性直觉判断/224
6.5 再论古典集合论与近代公理集合论中之无穷集合概念的矛盾性/226
6.5.1 弹性集合与柯西(Cauchy)剧场/226
6.5.2 古典集合论与近代公理集合论中的狭义柯西剧场现象/228
6.5.3 超穷弹性集合与超穷柯西剧场/231
6.5.4 ZFC 框架下的超穷柯西剧场现象/232
6.6 对角线方法中的“每一”与“所有”/234
6.7 分析基础中的无穷观问题/237
6.7.1 微积分与极限论的简要历史回顾/237
6.7.2 简记与注释/239
6.7.3 关于极限表达式的可定义与可实现概念/240
6.7.4 分析基础中的新贝克莱悖论/242
6.8 非直接使用 poi 与 aci 观念下的自然数系统的不相容性/244
6.8.1 注释与简记/244
6.8.2 恰由全体自然数构成之集合的不相容性证明/245
6.8.3 续论与说明/247
第 7 章 潜无限数学系统与重建实无限数学系统的构想/251
7.1 潜无限数学系统(Ⅰ)——预备知识/252
7.1.1 预备知识之一——背景世界的划分原则/252
7.1.2 预备知识之二——关于构建潜无穷数学系统的几点说明/253
7.2 潜无限数学系统(Ⅱ)——逻辑基础之形式系统/254
7.2.1 PIMS 命题逻辑的自然推理系统 P^{PIN}/255
7.2.2 PIMS 谓词逻辑的自然推理系统 F^{PIN}/257
7.3 潜无限数学系统(Ⅲ)——逻辑基础之元理论/264
7.4 潜无限数学系统(Ⅳ)——集合论基础/276
7.5 谓词与无穷集合之间的无穷观问题/284

7.5.1 数集与区间中变量趋向极限的表示法/284
7.5.2 实无穷刚性自然数集合与中介过渡/287
7.6 实无限刚性集合的内涵与结构/289
7.6.1 无穷背景世界中的谓词与集合之间的关系/289
7.6.2 无约束背景下的实无限刚性集合的结构模式/292
7.6.3 有约束背景下的实无限刚性集合的结构模式/295
附 录
Hegel 论消极无限与积极无限/297
参考文献
后 记

第一篇

几何基础

第 1 章 几何基础历史概要与公理化方法

1.1 Euclid《几何原本》与第五公设问题

在公元前 7 世纪以前的所谓几何学，只限于一些具体问题的解答，并且是十分粗糙和单凭经验的，直到公元前 7 世纪，才进入希腊几何学家致力于几何的高峰时期. Euclid(约公元前 330～275)是古代最大的几何学家之一. 由于他所编著的《几何原本》不仅集前人之大成，而且用严格的逻辑演绎来系统地陈述这一学科的内容，从而在 Euclid《几何原本》问世以后，就几乎湮没了在此以前任何其他有关几何学的著作.

Euclid 的《几何原本》，原说有 15 卷，后传说最后两卷是公元 2 世纪 Hypsisles 所著，直到近代才有人正式考证出来，第 14 卷是 Hypsisles 所续，第 15 卷又在公元 3 世纪时为其他几何学家所续. 因而今已公认 Euclid《几何原本》只有 13 卷.

15 世纪以后，印刷《几何原本》的版本甚多，现在一般公认 Heiberg 与 Menge 于 1883～1889 年的版本是经过科学的整理而翻印的，认为是标准版本，据此版本，第 1 卷开头是 23 个定义：诸如“点没有部分”、“线有长度没有宽度”、“线的界限是点”…. 在这些定义后是引进公设和公理①，例如，其中第五公设被陈述为：“若两直线与第三条直线相交，其一侧的两个内角之和小于两直角时，则把这两条直线向着该侧充分延长后一定相交”. ②如

① 历史上，人们曾提出区分公设与公理的原则，有一种原则认为：公理是算术与几何学所公用的，公设则仅为几何学所用. 又一种原则认为：公理本身十分自明，公设则不如公理那样自明，但也是不加证明就承认的. 现代公理论者则已概用公理一词来取代公设、公理而不加区分了.

② 在《几何原本》中对于公设或公理的基本地位的区分并没有说明，而且有些公理的归属问题的处理也不明确. 例如，有些版本也把第五公设列为第十一公理，又 Clavins 版本中列为十三公理等等.

此，所列出的一系列定义、公设和公理，都成为往后严格地陈述和论证每一条定理，直至形成一个演绎系统中所必不可少的根据. Euclid算是第一个提出几何根据问题的人，并由此而使得他的事业受到人们的崇高评价. 虽然，用现代数学的严谨观点来看《几何原本》的叙述，其中显然还有许多不严格的地方. 但却不能忘记，《几何原本》曾经是两千多年间一直被公认为用严格的逻辑结构来叙述学科的典范.

对于《几何原本》中的不足之处，大致上可以概括为如下几点：(1)有些定义的写法运用了一些它本身就应该定义的概念. (2)有些定义是多余的. (3)在有些定理的证明过程中，依靠了图形的直观，而这种直观自明性并未列入公理或公设中.

实际上，《几何原本》的某些不足之处，也早为古代学者所觉察. 例如，Archimedes 为了严格陈述关于长度、面积和体积的测量理论，就曾对 Euclid 的公设表作过必要的扩充. 人所共知的 Archimedes 公设（任给 $a>0$ 和 $b>0$，并且 $a<b$，则总有正整数 n，使有 $na>b$）便是其中一例，这也是测量几何的不可缺少的几何根据. 从某种意义上也可以说，自从 Archimedes 以后，人们一直在努力完善《几何原本》的陈述. 然而一直到 19 世纪末期，人们才第一次给出完备的公理系统，在这个系统中，可以不依靠任何其他空间直观的习惯性而推出所有的 Euclid 几何定理. 这是德国大数学家 Hilbert 的贡献，他的著作《几何基础》一书把公理化方法推向了完善化阶段，因而该书被誉为划时代的巨著.

古代学者对《几何原本》中所列之诸定义、公设、公理的内容与文字表述略加比较以后，就觉察到其中（如上文所陈述之）第五公设的文字与内容显得最为复杂和累赘，远不如其他公设、公理那样自明. 因而古代学者们就怀疑地指出，第五公设是不是多余的？它能不能从其他公设、公理中逻辑地推导出来？这就是所谓的 Euclid 第五公设问题. 不仅如此，古代学者们还进一步认为，Euclid 之所以把它当作公设，只是因为他没有能给出这一命题的证明，以致大家认为把第五公设所述的这一命题当作不证自明之公设列出，乃是《几何原本》中的那些逻辑缺点中的一个主要缺点. 致使多代学者们付出了巨大的精力去证明第五公设. 几乎可以说在 Euclid 以后的两千多年时间里，难以发现一个没有试证过第五公设的大数学家，连 Euclid 本人在《几何原本》中也是直到第 29 个命题才开始应用第五公设，因而可怀疑他也曾试证过它，至少他是尽可能地延迟，直到推车上壁时才应用第五公设. 历史上，所有试证第五公设的努力都失败了，在所有这些失败的“证明”中，或是最终发现证明有误，或是发

现在证明过程中暗自使用了与第五公设相等价的命题．在这些失败的“证明”中，唯一引出的正面结果便是一批等价命题的发现．两千多年来，在试证第五公设过程中被发现的与之等价的命题甚多，我们不能也不必一一列出，只能举其一、二，陈述如下：

（1）三角形内角和为二直角．即 $\sum(\Delta) = 2d$．此处用 $\sum(\Delta)$ 表示任意三角形之三个内角之和，又 $d = \frac{\pi}{2}$．

（2）普雷菲尔公理．过平面上已知直线外的一点，至多只能引一条直线平行于该已知直线．

“普雷菲尔（John Playfair，1748 ～ 1819，苏格兰人）在他校订的《几何原本》（1795 年在爱丁堡出版）中采用了一条很好的公理：‘过线外一点，只能作一直线与已知直线平行．’（或‘相交二直线不能同时平行于第三条直线．’）这一公理，比第五公设简单明了，所以受到普遍欢迎，被采用在现今的教科书中，称为普雷菲尔公理．”[1]

（3）锐角命题．存在一锐角，在其某一边上任一点引它的垂线，必与该锐角的另一边有交点．

在这里，我们要提到 Saccheri 和 Lambert 的工作．因为“萨凯里（Girolamo Saccheri，1667 ～ 1733，米兰的神父）对平行公理作了有价值的贡献，可说是非欧几何的先驱”．[1]“兰伯特（Johann Heinrich Lambert，1728 ～ 1777）在 1766 年发表的《平行线论》也有和萨凯里类似的研究”[1]．

如图 1.1 所示，Saccheri 从讨论四角形 $A'ABB'$ 出发，在这个四角形中，假定 $AA' = BB'$，又夹着 AB 边的两个内角都是直角，即 $\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2}$，人们称该四角形 $A'ABB'$ 为 Saccheri 四角形，记为 $S_a^{\square}$，易证 $S_a^{\square}$ 中的另外两个内角是相等的，即 $\angle A' = \angle B'$，并称之谓 Saccheri 角，记为 $S_a^{\angle}$．可以证明下述结论：

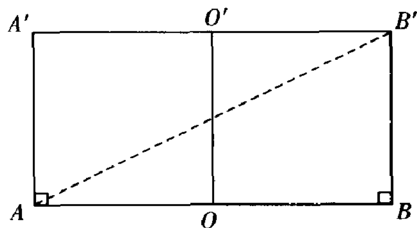


图 1.1

（4）$S_a^{\angle} = d$，当且仅当第五公设成立．

又如图 1.2 所示，Lambert 从讨论四角形 $ABCD$ 出发，在这个四角形中，有三个内角被假定为直角，即 $\angle A = \angle B = \angle C = \frac{\pi}{2}$，我们把这种四角形叫做 Lambert 四角形，记为 $L_a^{\square}$，又把 $L_a^{\square}$ 中那个没有假定为直角的内角叫做 Lambert 角，并记为 $L_a^{\angle}$. 可以证明下述结论：

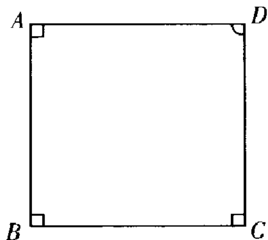


图 1.2

(5) $L_a^{\angle} = d$，当且仅当第五公设成立.

如所知，对于 $\sum(\triangle)$，有且仅有 $\sum(\triangle) > 2d$，$\sum(\triangle) = 2d$，$\sum(\triangle) < 2d$ 三种可能情形，对于 $S_a^{\angle}$ 和 $L_a^{\angle}$ 也是一样，即要么 $S_a^{\angle} > d$，$L_a^{\angle} > d$，要么 $S_a^{\angle} = d$，$L_a^{\angle} = d$，要么 $S_a^{\angle} < d$，$L_a^{\angle} < d$. 人们不仅证得如上(1)、(4)、(5)所示，$\sum(\triangle) = 2d$、$S_a^{\angle} = d$、$L_a^{\angle} = d$ 三者均与第五公设等价，而且易见 $\sum(\triangle) > 2d$、$S_a^{\angle} > d$、$L_a^{\angle} > d$ 三者均不得成立，因而只要不以第五公设为基础得以否定 $\sum(\triangle) < 2d$、$S_a^{\angle} < d$、$L_a^{\angle} < d$ 三者之一，则就算是完全解决了第五公设问题，即就算是从《几何原本》中之其他公设、公理中逻辑地导出了第五公设. 历史上，人们都曾想用反证法来达到这个目的. 如所知，Legendre、Saccheri、Lambert 分别依次想从 $\sum(\triangle) < 2d$、$S_a^{\angle} < d$、$L_a^{\angle} < d$ 的假设下引出矛盾来. 然而，他们虽然在各自所设的前提下深入地进行推导和演绎，直到引出了相当复杂的几何系统，但除了在各自的系统中获得许多矛盾于直观感觉的古怪命题外，始终没有引出两个在逻辑上互相排斥的命题. 应当指出，在当时来说，Lambert 的几何观点是最先进的，工作也推进得最远. 他不仅从来没有在他的著作里声称过他已经证明了第五公设，而且“他认识到任何一组假设如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何. 这种几何是一种真的逻辑结构，虽然它或许对真实的图形作用很少，后者或可提示一种特别的几何，但不能限制逻辑上可能发展的千差万别的几何”.[2] 由此可见，Saccheri 和 Lambert 不愧为非欧几何的先驱者了.

1.2 Лобачевский的信念和品质

虽说Euclid《几何原本》在逻辑结构上的那些真正缺点和上节所提到的第五公设这个"缺点",早为古代学者所觉察,而且在两千多年的漫长岁月里,学者们是如此不遗余力地去修正这些缺点和"缺点",借以完善几何原本的陈述,但在另一方面,却又毫不影响人们始终坚信Euclid几何是现实空间的正确抽象.

"很多人确实说出了绝对信任Euclid几何为真理的话.例如Isaac Barrow把他的数学包括微积分在内都建立在几何基础之上,对几何的肯定性列举八项理由:概念清晰,定义明确,公理直观可靠而且普遍成立,公设清楚可信且易于想象,公理数目少,引出量的方式易于接受,证明顺序自然,避免未知事物.

Barrow确曾提出问题:何以确知几何原理可应用于自然界?其回答是,这些原理来自内在理性.感觉到的事物只是起了唤醒它们的作用.再者几何原理早为长期经验所不断证实,并将继续如此.因为上帝创造的世界是万古不易的.于是几何是完备的与肯定无疑的科学."[2]

直到17世纪末期和整个18世纪,除了个别学者(也只限于作为怀疑论者的哲学观点而认为,几何定律也和宇宙间一切事物不会有它一定的法则那样,未必是物理的真理)以外,几乎所有的哲学家和数学家都认为Euclid几何定律是绝对真理,甚至Hegel也指出:初等几何就Euclid所遗留给我们的内容而言,已经可以视为相当完备了,不可能再有更多的进展.应当指出,最有代表性的是Kant,他把Euclid几何看成是关于空间的绝对真理,即所谓先验的综合判断.作为Kant同时代的学者们,也几乎全都同意Kant的观点.这就是说,不仅整个18世纪,直到19世纪初期,Euclid几何是绝对真理的观点一直笼罩着整个学术界.

但是正反的历史经验总会在一些先进人物的头脑中首先引起反响,迫使他们起来反抗传统观念的束缚,寻找新的出路.基于两千多年来,在求证第五公设征途上屡遭失败的教训,19世纪俄国的年轻数学家Лобачевский产生了与前人完全不同的信念.他首先认为第五公设不能从其余的几何公理、公设中逻辑地推导出来,就是说第五公设与其他几何公设、公理是相互独立而不是逻辑相关的.其次,除掉第五公设成立的Euclid几何之外,还可以有第五公设不成立的其他几何系统存在,就是说Euclid几何并不是唯一的真实.Лобачевский指出:从Euclid时代以

来，两千年来的徒劳无益的努力，促使我怀疑在概念本身之中并未包括那样的真情实况．于是 Лобачевский 在 Euclid 几何系统中把第五公设予以剔除，同时却引进一条与第五公设正好相反的公理，它被表述为“过平面上一已知直线外的一点，至少可以引两条直线与该已知直线不相交”．人们称之为“罗氏公设”，就其陈述形式而言，正好是相反于 Playfair 公理的，而如前文所述，Playfair 公理乃是第五公设之等价命题之一．如此，Лобачевский 就构造了一个新的几何系统，它与 Euclid 几何系统相并列．两个几何系统的相异之处仅在于一个承认第五公设而不承认罗氏公设，另一个则承认罗氏公设而不承认第五公设．除此而外的其余公设、公理均相同．通常把这两个几何系统中的公共部分，即由两者中一切相同的公设、公理和定义所构成的几何系统称为绝对几何．因而由绝对几何系统外加第五公设便构成 Euclid 几何系统，而由绝对几何系统外加罗氏公设所构成之几何系统则为 Лобачевский 几何．

Лобачевский 按上述方式构造了新的几何系统之后，经过演绎推理，获得了大批定理．人们可以看到，其中之许多定理就是在 $\sum(\Delta) < 2d$、$S_a^\angle < d$ 和 $L_a^\angle < d$ 的假定下，试证第五公设之过程中被推演出来的命题．就其实质而言，$\sum(\Delta) < 2d$、$S_a^\angle < d$ 和 $L_a^\angle < d$ 的假定在下述意义下等价于罗氏公设．即由绝对几何外加 $\sum(\Delta) < 2d$，或外加 $S_a^\angle < d$ 或外加 $L_a^\angle < d$，均可逻辑地导出罗氏公设．反之，在 Лобачевский 几何系统中，亦可导出 $\sum(\Delta) < 2d$、$S_a^\angle < d$ 和 $L_a^\angle < d$，在这里，应当郑重指出的是：Лобачевский 推演定理之目的在于建造他的新几何大厦．而 Legendre、Saccheri、Lambert 则不同，他们只是希望在各自的假设之下导致矛盾．就是说，除了我们在 1.1 节中所指出之 Lambert 的观点较为先进之外，他们都没有建立起 Лобачевский 的信念．然而，Лобачевский 的先进思想，却又完全不为他同时代的普通学者和所谓“学者”们理解．因而不仅得不到赞扬，反而遭受一连串的嘲弄和打击，被斥之为“笑话”和科学上的“混乱”．然而极为可贵的是：“没有任何力量可以动摇罗巴契夫斯基的信心，他像屹立在大海中的灯塔，惊涛骇浪的冲击足显出他刚毅的意志．他一生始终为新思想而斗争．”[1] 毫无疑问，这是一种不朽的、常人难以做到的和永远值得后人学习的高贵品质．

历史地看，新思想好像有它的时代性一样，往往在同一个时期中被一些先进人物各自独立地发现．如所知，在 Лобачевский 同时代的、当时年仅 21 岁的青年数学家 Bolyai(1802 ～ 1860)，还有德国大数学家

Gauss(1777 ～ 1854) 也不约而同地达到了上述 Лобачевский(1792 ～ 1856) 的信念而发现了新几何的存在. 然而 Gauss 由于害怕愚人们的叫喊而终身不敢公开发表自己在这方面的研究成果,又 Bolyai 虽然把他在这方面见解与成就作为他父亲的一部几何著作的附录而公开发表了,但却由于得不到任何人的同情与理解,以致无力支持自己继续从事这方面的研究,几乎是在失望和孤独中度过自己的余生.

在新几何的发明权上,至今还有争议. 例如,美国柯朗数学研究所的 M. Kline 教授就认为把发明新几何的伟大贡献归功于 Лобачевский 是不公正的. 他说:"Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 创造非 Euclid 几何,既不是同时创造的例子,也不能认为把伟大功绩归于 Lobatchevsky 与 Bolyai 是公允的. "[2]"Lobatchevsky 与 Bolyai 都从 Gauss 那里得到许多启发. Lobatchevsky 在 Kazan 的教师 Johann Martin Bartels(1769 ～ 1836) 是 Gauss 的好友. 实际上,从 1805 ～ 1807 年间,Gauss 和 Bartels 是在 Brunswick 共同度过的,嗣后还彼此保持通信. Bartels 不把 Gauss 有关非 Euclid 几何的进展告诉 Lobatchevsky(他留在 Kazan 大学,和 Bartels 是同事),那是绝对不可能的,特别是 Bartels 一定知道 Gauss 对 Euclid 几何真理性的怀疑. "[2]"就 John Bolyai 说,他的父亲 Wolfgang 也是 Gauss 的一位挚友,并且是 1796 ～ 1798 年在哥廷根的同学,Wolfgang 与 Gauss 不仅彼此继续通信,并且讨论了平行公理的特别课题,…Wolfgang 继续努力研究平行公理问题. 并在 1804 年送给 Gauss 一个所谓证明. Gauss 向他指出证明是错误的. 在 1817 年,Gauss 肯定认为,不仅公理不能证明,而且逻辑上相容而物理上又能应用的非 Euclid 几何是能够构造的. 他除了在 1799 年的信上讲了这一点之外,还把他最近的思想坦率地告诉了 Wolfgang. Wolfgang 继续研究这个问题直到他 1832 ～ 1833 年的《原理论著》出版. 因为他要他的儿子继续研究他所从事的平行公理的工作,所以几乎可以肯定他会把自己所知道的一切传给他的儿子. "[2]

在这里,我们有理由不同意 M. Kline 教授的看法. 不妨退一步讲,即使完全肯定 M. Kline 的上述考证和估猜,那么仅就 Gauss 之畏于学术界的庸俗势力和 Bolyai 的灰心丧气,都未为新几何的生存作努力而言,其后果是什么?是不言而喻的. 相反地,唯有 Лобачевский 才坚持不懈地为新几何的生存而奋斗终生,当时身为嘉桑大学校长和数学教授的 Лобачевский 毫不在意自己的职位和名声,不惜付出任何代价坚持与学术界的陋俗见解进行斗争,以致终身为此忍受嘲讽和打击,直到他逝世前一年,虽然双目失明,还口授写成《泛几何学》. 所以可以认为,用 Лобачевский 的名字给

新几何命名，同时也承认 Gauss 和 Bolyai 独立地发现了新几何，乃是十分公道的.

现在，让我们再回过头来仔细分析一下 M. Kline 的上述考证和估猜，不难发现它是站不住脚的. 试看 Wolfgang 给他儿子 Bolyai 的一封信上写道："希望你再不要做克服平行线论的尝试. … 我经过了这个夜的无希望的黑暗，并且我在这里面埋没了人生的一切亮光、一切快乐. 老天啊！希望你放弃这问题. 对它的害怕应当更多于感情上的迷恋，这是因为，它会剥夺你生活中的一切时间、健康、休息和幸福的. 这个无希望的黑暗能使千只牛顿的塔沉没".[3] 由此可见，M. Kline 所说 Wolfgang 要他的儿子继续研究他所从事的平行公理工作之说是不可靠的. 而且当 Bolyai 在 Wolfgang 著作的附录中发表了构造新几何成果之后，Wolfgang 马上就把这个附录寄送 Gauss 评阅. 而 Gauss 在回信中写道："如果我从头就说我不能称赞约翰的工作，那么你一定会立刻惊怪，但是我不能说出任何别的话；称赞他等于称赞我自己，因为这研究的一切内容，你的儿子所采用的方法和他所达到的一些结果几乎全部和我的一部分在 30 ～ 50 年前已开始的个人沉思相符合的缘故. 我真是被这些所恐骇到顶了.

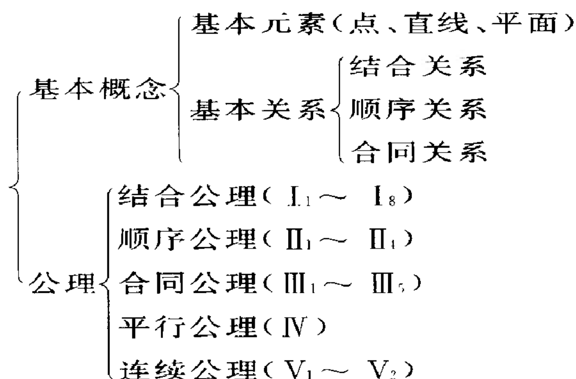
关于我自己的著作，虽然有一小部分已经写好，但我的目标本来是一生里不愿发表的. 大多数人对于那里所讨论的问题抱着不正确的态度；我仅发觉少数人听了我和他们谈过这件事觉得有兴趣. 我的目标在于把它写下来，免得和我一同湮没. 使我快乐地感觉到惊奇的是现在可以免去这劳力的耗费，并且特别高兴的，在我的面前有这样惊异姿态的人正是老友的儿子".[3] 我们在这里没有发现一丝一毫有如"你的儿子的工作与我多年前和您讨论过的思想完全相符"之类的言辞或情绪. 可见 M. Kline 所认为"Wolfgang 把从 Gauss 那里听到的新思想传给他儿子"之说也是靠不住的. 至于 M. Kline 认为 Bartels 将 Gauss 有关非 Euclid 几何的进展告诉 Лобачевский 之说就更无充分根据了. 相反地，"罗巴契夫斯基死后不久，高斯的通信录开始出版. 高斯给舒马赫(H. K. Schumacher, 1780 ～ 1850)的信中对罗巴契夫斯基推崇备至."[1] 当然，Gauss 独立地更早得到新几何学也是事实，但有关 Gauss 对于非欧几何的研究是在他死后，从他和一些数学家的通信及遗稿中才为人所知. 1829 年，Gauss 在一信中写道："恐怕我还不能够迅速修改关于这问题的自己很广泛的研究，使它可以出版. 甚至在我的一生里可能不解决这件事，因为当我发表自己的全部意见时，我害怕引起标丁人(即愚人 —— 笔者)的喊声."[3] 所以，尽管

Gauss 独立地创立了新几何，却畏于流俗之陋见而延迟了新几何的诞生，这与 Лобачевский 不畏艰险并为之奋斗终生的精神是不能相比的，所以后人不以 Gauss 的名字为新几何学命名，而称之谓 Лобачевский 几何学，这是理所当然的.

1.3 Hilbert 的 Euclid 几何公理系统

我们在 1.1 节中指出：Euclid《几何原本》的陈述，有它逻辑结构上的不足之处，直到 19 世纪，才由 Hilbert 最终弥补这些不足之处，进而提供了一个完善的 Euclid 几何公理系统，这一切都写在他的巨著《几何基础》[7] 一书中，并由此而解决了用公理方法研究几何学的基础问题.

Hilbert 关于 Euclid 几何公理系统的陈述，包括三个基本元素、三个基本关系、八条结合（或称关联）公理、四条顺序公理、五条合同公理、一条平行公理和两条连续公理，其基本结构如下表所示：



这是 Hilbert 的经典叙述. 而后来，人们已习惯于将连续公理列为第 Ⅳ 组，平行公理列为第 Ⅴ 组. 另外，又将连续公理中的“完备公理”改为“Cantor 公理”. 当然，可以证明经过改动后的公理系统与原来的公理系统是等价的，所以这种改动是形式的或非实质的，即在本质上没有对 Hilbert 所给的 Euclid 几何公理系统作任何改动.

现在，让我们来系统陈述如上之 Hilbert 的 Euclid 公理系统. 首先，将有一些对象被取为基本元素，一些关系被取为基本关系，统称为基本概念，而基本概念是脱离直觉形象的. 唯一的要求是它们必须满足系统内诸公理的要求.

定义 3.1 设有三类不同的对象：一为点、二为直线、三为平面，分

别以“$A,B,C\cdots$”、“$a,b,c,\cdots$”，“$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$”表示.

这三类不同的对象之间存在着某些关系，这些关系将用“落在…上”、“在…中间”、“合同”、“平行”、“连续”等术语来表述.然而这些术语只是用以表示对象之间具有某种关系的符号，并不受这些术语的词义解释的约束.例如，公理“任给两点 A 和 B，必存在一直线 a 与 A、B 相关”，也可表述为“对于任意两点 A 和 B，至少有一直线 a 通过 A 和 B”.但不论用怎样的文字或术语表述这一公理，完全不必顾及诸如什么叫“通过”或什么叫“连结”等等，只要求“任给两点，必有一直线与它们同时存在着相关这个关系”.下述第一组的 8 条公理表述了直线与平面对于点的这种“相关”的关系.

第一组　结合公理 $\mathrm{I}_1 \sim \mathrm{I}_8$

I_1　对于任意两个不同的点 A 和 B，至少有一直线 a 连结 A 和 B.

I_2　对于任意两个不同的点 A 和 B，至多有一直线 a 连结 A 和 B.

I_3　任一直线上至少存在着两个点，又至少存在着不在同一条直线上的三个点.

I_4　任给不在同一条直线上的三个点 A、B、C，至少存在一个平面通过 A、B、C.又任一平面上至少有一个点.

I_5　任给不在同一条直线上的三个点 A、B、C，至多存在一个平面通过 A、B、C.

I_6　如果一条直线上的两个点落在同一个平面上，则该直线上的任何一点都落在该平面上.

I_7　如果两个平面有一个公共点，则它们至少还有另一个公共点.

I_8　至少存在着四个点，它们不在同一个平面上.

上述的 8 条结合公理，只有少数几条出现在《几何原本》中，大部分是 Hilbert 补入的.此外，我们特别指出有如古代几何学家总是直觉地认为“直线上必有无穷多个点”，并在论证中无条件地使用它，又不明确列为公理，在 Hilbert 的 Euclid 几何系统中，“直线上有无穷多个点”却可作为系统内的定理而被证明.

第二组　顺序公理 $\mathrm{II}_1 \sim \mathrm{II}_4$

本组的公理 II_1、II_2、II_3 称为线性顺序公理，而公理 II_4 涉及几何元素在平面上的位置，叫做 Pasch 公理.另外，在以下所论几何元素之间，除掉前述“相关”这个关系之外，还有新的基本关系，我们用术语“介于”或“在…之间”来表示它.“介于”这个关系应满足如下公理 $\mathrm{II}_1 \sim \mathrm{II}_4$ 的要求.

II_1　若 A、B、C 是直线 a 的三个不同的点，并且 B 在 A 与 C 之间，则

B 也在 C 与 A 之间.

II_2 任给两点 A 和 C，则过 A 和 C 的直线上至少还存在着一点 B，使得 C 在 A 和 B 之间.

II_3 直线上任意三点，至多只有一点在其余两点之间.

定义 3.2 设 A 和 B 为直线 a 上的两个点，则称点组 A、B 为线段，并记为 AB 或 BA，凡在 A 和 B 中间的点称为线段 AB 内部的点，简称为线段 AB 的点. A 和 B 称为 AB 的端点，并把 a 上其余的点称为 AB 外部的点.

II_4(Pasch 公理) 任给不在同一条直线上的三个点 A、B、C，又直线 a 落在 A、B、C 的平面 α 上，并且 a 不通过 A、B、C 中任一点，则当 a 通过线段 AB 内部的点时，那么 a 或者还通过线段 AC 内部的点，或者还通过线段 BC 内部的点.

第三组 合同公理 III_1～III_5

定义 3.3 如果点 C 和 D 都在点 A 和 B 的中间，则称线段 CD 在线段 AB 的内部.

定义 3.4 设 A、B、C、D 是直线 a 上四个不同的点，而且 C 在 A 和 D 之间而不在 A 和 B 之间，则我们说点 A 和 B 位于直线 a 上点 C 的同一侧，而点 A 和 D 是位于 a 上点 C 的两侧.

定义 3.5 设点 O 与 A 是直线 a 上的两个不同的点，我们称所有与 A 在点 O 同一侧的点为由 O 与 A 在 a 上所决定的射线(或称半直线)OA 的点，而点 O 叫做半直线(或称射线)OA 的原点.

定义 3.6 设直线 a 在平面 α 上，点 A 和 B 在 α 上而不属于 a 的两个点，如果线段 AB 包含 a 的点，则称 A 和 B 在 a 的两侧，如果 AB 不包含 a 的点，则称 A 和 B 在 a 的同侧.

定义 3.7 设 α 为空间的一个平面，而 A 和 B 为不在 α 上的两点，如果线段 AB 包含 α 的点，则称 A、B 在 α 的异侧，而当 AB 不包含 α 的点时，称 A、B 在 α 的同侧.

下文将用术语“合同”或“相等”来表示线段与线段之间的某种关系.

III_1 设 A、B 为直线 a 上的两个点，又 A' 是直线 a'(也允许 a 与 a' 为同一条直线)上的点，则在 a' 上点 A' 的某一侧，有且仅有一点 B，使得线段 AB 与线段 $A'B'$ 合同(或说 AB 等于 $A'B'$)，记为 $AB \equiv A'B'$. 对于每个线段 AB 都有合同或相等关系 $AB \equiv BA$.

III_2 如果线段 $A'B'$ 和 $A''B''$ 均合同于一个线段 AB，则 $A'B'$ 合同于 $A''B''$，亦即当 $A'B' \equiv AB$ 且 $A''B'' \equiv AB$ 时，就有 $A'B' \equiv A''B''$.

Ⅲ$_3$ 如果 AB 和 BC 是直线 a 上的两个线段且无公共的内部的点，又 $A'B'$ 和 $B'C'$ 为同一条或另一条直线 a' 上的两个线段，它们也没有公共的内部的点，如果此时 $AB \equiv A'B'$ 且 $BC \equiv B'C'$，则必有 $AC \equiv A'C'$.

定义 3.8 由同一点 O 出发，而不属于同一条直线的一对半直线 h、k 叫做角，记为 $\angle(h,k)$ 或 $\angle(k,h)$. 当 A 为 h 的点，而 B 属于 k 时，则也把 $\angle(h,k)$ 记为 $\angle AOB$. h 和 k 称为角的边，O 称为角的顶. 设半直线 k' 与 h' 分别将 k 和 h 补为直线，把这两条交于点 O 的直线所决定的平面记为 α①，则把 α 上同时满足如下两个条件的点称为 $\angle(h,k)$ 的内部的点，并称所有这样的点的集合为 $\angle(h,k)$ 的内部区域，这两个条件是：

(1) 与 k 的点在直线(h,h')之同侧，

(2) 与 h 的点在直线(k,k')之同侧.

如此，又把 α 上除去角的顶和边，以及角的内部的点之外的点称为 $\angle(h,k)$ 外部的点. 并称所有这样的点的集合为 $\angle(h,k)$ 的外部区域，如图 3.1 所示，角的内部区域由双重线条标明.

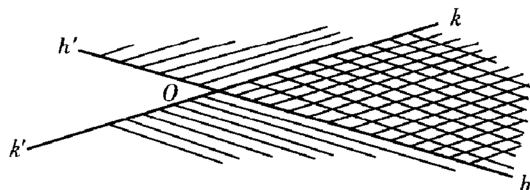


图 3.1

我们也用“合同”或“相等”之类的术语去表达角与角之间的某种关系.

Ⅲ$_4$ 设 $\angle(h,k)$ 在平面 α 上，又在同一个或另一个平面 α' 上给定一直线 a' 及其确定的一侧，h' 是由 a' 上一点 O' 沿着 a' 出发的半直线，那么在 α' 上由 O' 出发有且仅有一射线 k'，使 $\angle(h,k)$ 合同于 $\angle(h',k')$，则记为 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$，亦即如图 3.2 所示，任意一个角总可唯一地放在已知平面上之已知半直线的一侧. 又每个角都与自己合同，亦即 $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$，$\angle(k',h') \equiv \angle(k',h')$.

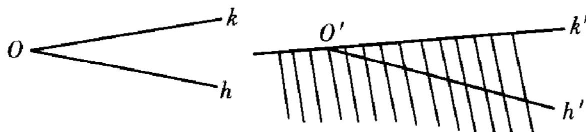


图 3.2

① 参见下文定理 3.2.

Ⅲ₅　设 A、B、C 为不共线的三个点，而 A'、B'、C' 亦不在一条直线上．如果 $AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，并且 $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$，则如图 3.3 所示，必有 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ 和 $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$．

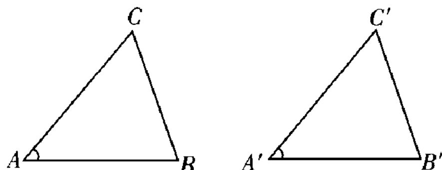


图 3.3

第四组　　连续公理 Ⅳ₁～ Ⅳ₂

Ⅳ₁（Archimedes公理）　设 AB 和 CD 是任意两个线段，则在直线 AB 上存在着有限多个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使得 A_1 在 A 和 A_2 之间，A_2 在 A_1 和 A_3 之间等等，并且线段 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$ 都合同于线段 CD，并且 B 在 A 和 A_n 之间．如图 3.4 所示．

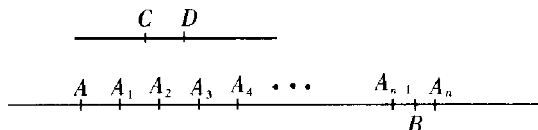


图 3.4

Ⅳ₂（Cantor 公理）　设在任意直线 a 上有线段无穷序列 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$，其中每个后面的都在前面一个的内部，再设不存在这样的线段，它能在所有这些线段的内部．那么在直线 a 上，就存在且只存在一个点 x，它落在所有这些线段 $A_1B_1, A_2B_2, \cdots$ 的内部．如图 3.5 所示．

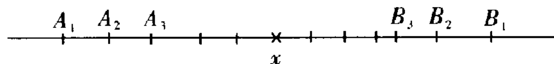


图 3.5

如所知，我们在本节开头所列 Hilbert-Euclid 几何公理系统表之后曾指出：在 Hilbert 的经典陈述中，并无上述 Cantor 公理，而另有一条叫做“完备公理”的公理，但这样的改动无碍大局，本质上与 Hilbert 的经典陈述是一回事．

第五组　　平行公理 Ⅴ

定义 3.9　在同一个平面上，没有公共点的两条直线叫做平行的．

Ⅴ（平行公理）　过平面上任一已知直线外的任一点，至多只能引一条直线与该已知直线平行．

注意此处对平行公理所采用的陈述方式是《几何原本》中第五公设的等价命题之一，即所谓 Playfair 公理.

如上便是 Hilbert 的 Euclid 几何公理系统的内容和陈述. 下文我们将据此逻辑地依次列出 Hilbert-Euclid 几何公理系统中的定理，直至足以说明 Hilbert 的 Euclid 几何公理系统，能以弥补《几何原本》中的那些逻辑结构上的缺点为止. 如所知，一个形式系统中的定理是无穷无尽的，我们既无必要也不可能无休止地推演和罗列下去. 另一方面，限于本书的性质和篇幅，此处不对所列之任何定理加以证明. 如果有兴趣于研究这些定理之详细证明的读者，可查阅文献[5]的 2.2 节，在那里，对于此处所列之定理均有详细而严格的证明过程，以及必要的图示.

定理 3.1 两条直线至多只有一个公共点，二平面要么没有公共点，要么它们所有的公共点都在同一条直线上. 又任一平面和不在它上面的任一直线至多有一个公共点.

定理 3.2 有且只有一个平面通过一直线 a 和不在 a 上的一点 A；有且只有一个平面通过有公共点的两条不同的直线.

定理 3.3 每个平面至少有三个点.

定理 3.4 任给两个不同的点 A 和 C，则在连结 A 和 C 的直线 a 上至少有一点 D，并且 D 在 A 和 C 之间.

定理 3.5 在一直线上的任意三个点 A、B、C，总有一个点在另外两个点的中间.

定理 3.6 如果直线 a 与三个线段 AB、BC、CA 中的某两个相交，则 a 就不能再和另一个线段相交.

定理 3.7 假设点 B 在线段 AC 上，而且点 C 在线段 BD 上，则 B 和 C 都在线段 AD 上.

定理 3.8 设点 B 在线段 AC 上，而点 C 在线段 AD 上，则点 C 在线段 BD 上，而点 B 在线段 AD 上.

定理 3.9 在直线上任意两点中间，存在着无穷多个点.

定理 3.10 如果 C 和 D 都在 A、B 之间，则线段 CD 的所有的点都在 A、B 之间，即线段 CD 的每一点都是线段 AB 的点.

定理 3.11 如果点 C 在点 A 和点 B 之间，则线段 AC 的每一点都在线段 AB 上.

现据本节中前述定义所引进的术语来陈述如下的：

定理 3.12 设 O 表示任给一直线 a 上的任一点，则点 O 把 a 上所有其余的点分成两类；使得 a 上任意两点，如果是同一类的，则它们在点 O

的同一侧，如果不是同一类的，则它们在点 O 的不同两侧.

定义 3.10 如果某一集合的元素 A、B、C、… 之间存在所谓“在前”这个术语所表示的关系，也记为“$\prec$”，并且满足条件：

(a) 若 A 和 B 是集合的不同的元素，则或有 $A \prec B$(A 在 B 之前)，或有 $B \prec A$(B 在 A 之前)；

(b) 如果 $A \prec B$ 且 $B \prec C$，则有 $A \prec C$.

那么我们就说这个集合是有序集. 关系“$\prec$”的条件(a) 叫做非对称性，条件(b) 叫做传递性.

例如，由全体实数所组成的集合可以按元素的大小关系排成有序集合，只要让 $a \prec b$，当且仅当 $a < b$.

今设 O 是直线 a 上的一点，现于以 O 为公共原点的两条半直线中任选其一，我们说该半直线上的点 A 在点 B 之前，即有 $A \prec B$，如果 A 是线段 OB 的点. 如此，不难验证定义 3.10 中之非对称性和传递性均可得到满足. 从而每条半直线上的点的集合能排成有序集.

现约定把有公共原点 O 的两条半直线中的某一条叫做第一条，同时称另一条半直线为第二条. 然后按如下 5 个条件来定义整个直线上的点的顺序：

(1) 设 A 和 B 是第一条半直线上的两个点，并在第一条半直线上 $B \prec A$，则在整个直线 a 上仍有 $B \prec A$.

(2) 在直线 a 上，第一条半直线上的每一点 D，都有 $D \prec O$.

(3) 在直线 a 上，第一条半直线上的任一点 D 与第二条半直线上任一点 E，总有 $D \prec E$.

(4) 在直线 a 上，点 O 与第二条半直线上每一点 E，都有 $O \prec E$.

(5) 设 A 和 B 是第二条半直线的两点，如果在第二条半直线上 $A \prec B$，则在直线 a 上 $A \prec B$.

同样地，不难验证，对于直线 a 上所有的点，按上述(1) ~ (5) 条所安排的顺序能满足非对称性和传递性，从而能以排成有序集. 又若将上述第一条和第二条半直线的地位相互调换，并再使用上述(1) ~ (5)，则可得直线 a 的一个新的顺序，它与原先的一个顺序正好相反. 就是说，对于第一个顺序里的 $A \prec B$，则在第二个顺序中为 $B \prec A$. 故条件(1) ~ (5) 确定 a 上的两个相反的顺序，并且易见条件(1) ~ (5) 的排序与 O 点的取法无关.

定理 3.13 设 A、B、C、D 为同一条直线 a 上的四个点，并且 B 和 C 都在 A、D 之间. 则要么有 C 在 A、B 之间，要么有 C 在 B、D 之间. 两者不

得并立.

定理 3.14 平面 α 上任一直线 a 将 α 上不属于 a 的点分为两类，使得不同类的任何两点 A 和 B 位于 a 的不同两侧，而同一类的任何两点 A 和 A' 在 a 的同侧.

上述几个定理讨论了点在直线和平面上之位置的特性，下述定理 3.15 则是关于点在空间中之位置特性的一个定理.

定理 3.15 每个平面 α 把空间中不在 α 上的点分成两类，使得不同类的任意两个点 A 和 B 在 α 的异侧，而同一类的任意两个点 A 和 A' 在 α 的同侧.

定理 3.16 (a) 如果 $AB \equiv A'B'$，则可有 $AB \equiv B'A'$，$BA \equiv A'B'$ 和 $BA \equiv B'A'$. 这表示线段的合同关系与决定线段的点的顺序无关. (b) $AB \equiv AB$，即每个线段合同于它自己. (c) 如果 $AB \equiv A'B'$，则 $A'B' \equiv AB$. 即合同关系具有对称性. (d) 如果 $AB \equiv A'B'$ 且 $A'B' \equiv A''B''$，则 $AB \equiv A''B''$. 即合同关系具有传递性.

定理 3.17 设 A 和 B 是 $\angle(h,k)$ 两边上的任意点，则由角顶 O 出发而位于 $\angle(h,k)$ 内部的任一半直线 l 总与线段 AB 相交；反之，连接角顶 O 与线段 AB 的任意点的半直线 l 总位于 $\angle(h,k)$ 的内部.

现设直线 a 上有点组 $A,B,C,\cdots,M,N$，又直线 a' 上有点组 $A',B',C',\cdots,M',N'$，如果 $AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，$BC \equiv B'C'$，$\cdots$，$MN \equiv M'N'$，则我们就说这两个点组是互相合同的.

定理 3.18 设 A、B、C 和 A'，B'，C' 各为直线 a 和 a' 上的三个点，再设 $AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，B 在 A，C 之间，B' 与 C' 在 a' 上位于 A' 的同侧，则可得结论 B' 在 A' 和 C' 之间.

定理 3.19 设点组 $A,B,C,\cdots,M,N$ 与点组 $A',B',C',\cdots,M',N'$ 是互相合同的，又前一个点组的点是这样排列的：$C,D,\cdots,M,N$ 在 B 的同一侧，而 A 在 B 的另一侧，又 A,B 在 C 的同侧，而 $D,\cdots,M,N$ 在 C 的另一侧等等，那么后一个点组的点必然对应地排列为 $C',D',\cdots,M',N'$ 在 B' 的同一侧，A' 在 B' 的另一侧，A',B' 在 C' 的同侧，而 $D',\cdots,M',N'$ 又在 C' 的另一侧等等.

实际上，定理 3.19 是说两个互相合同的点组对于点的排列顺序是保序的.

定义 3.11 如果三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 满足条件：$AB \equiv A'B'$，$BC \equiv B'C'$，$\angle A \equiv \angle A'$，$\angle B \equiv \angle B'$，$\angle C \equiv \angle C'$，则称三角形 ABC 合同于三角形 $A'B'C'$，记为 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

定理 3.20　如果对于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 有如下的合同关系：$AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，$\angle A \equiv \angle A'$，则 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

定理 3.21　如果对于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 有如下的合同关系：$AB \equiv A'B'$，$\angle A \equiv \angle A'$，$\angle B \equiv \angle B'$，则 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

定理 3.22　设 $\triangle ABC$ 中有 $AC \equiv CB$，则 $\angle CAB \equiv \angle CBA$.

定理 3.23　设 h,k,l 分别是平面 α 上由点 O 发出的射线，h',k',l' 分别是平面 β 上由点 O' 发出的射线，又 l 在 $\angle(h,k)$ 内部，l' 在 $\angle(h',k')$ 内部，$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l')$，$\angle(l,k) \equiv \angle(l',k')$，则 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

定理 3.24　设 h,k,l 分别是平面 α 上由点 O 发出的射线，h',k',l' 分别是平面 β 上由点 O' 发出的射线，又 k 在 $\angle(h,l)$ 内部，k' 在 $\angle(h',l')$ 内部，$\angle(h,l) \equiv \angle(h',l')$，$\angle(k,l) \equiv \angle(k',l')$，则 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

定理 3.25　如果对于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 有如下的合同关系：$AB \equiv A'B'$，$AC \equiv A'C'$，$BC \equiv B'C'$，则 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

定理 3.20、定理 3.21、定理 3.25 依次称为三角形合同的第一、第二、第三定理.

定理 3.26　设 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ 和 $\angle(h,k) \equiv \angle(h'',k'')$，则 $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$.

定义 3.12　如果两个角有公共的顶点和一边，而两角其余的边成一直线，则称此二角为邻补角. 如果两个有公共顶点的角的边成对地构成直线，则称此二角为对顶角. 又设任给一个角，如果它的邻补角与它合同，则称为直角. ①

定理 3.27　设 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$，则它们的邻补角也互相合同.

定理 3.28　设 $\angle(h,k)$ 与 $\angle(h',k')$ 是对顶角，则 $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

定理 3.29　所有的直角都互相合同.

定理 3.30　任一线段均可一意地加以平分，亦即任给线段 AB，则在线段 AB 上有唯一的点 O（称为中心），使 $AO \equiv OB$.

经过引进三角形之高、中线和垂线等概念后，有如下一些定理.

定理 3.31　任意等腰三角形的顶角的平分线也是高和中线.

定理 3.32　任意角总可唯一地加以平分.

定理 3.33　任意点到已知直线上能且只能作一条垂线.

定理 3.34　平面上任一直线上的任一点能且只能作一条直线垂直

---

①　应用 III_1，III_4，III_5 和适当的做法，易证直角的存在性.

于该直线.

定义 3.13 设 AB 和 $A'B'$ 是任给的两个线段,如果在 AB 内部有点 C,使有 $AC \equiv A'B'$,则称 AB 大于 $A'B'$ 或 $A'B'$ 小于 AB,记为 $AB > A'B'$ 或 $A'B' < AB$.

定义 3.14 设 $\angle(h,k)$ 和 $\angle(h',k')$ 为任给的两个角,若有从 $\angle(h,k)$ 顶点出发而位于其内部的半直线 l,使得 $\angle(h,l) \equiv \angle(h',l')$,则称 $\angle(h,k)$ 大于 $\angle(h',k')$ 或 $\angle(h',k')$ 小于 $\angle(h,k)$.

定理 3.35 设 AB 和 CD 是任给的两个线段,则三个关系 $AB \equiv CD$、$AB > CD$、$AB < CD$ 中有且仅有一个成立.

定理 3.36 若 $AB < A'B'$ 且 $A'B' < A''B''$,则 $AB < A''B''$.

定理 3.37 如果线段 CD 是线段 AB 的一部分,则 $CD < AB$.

上述关于线段关系的定理 3.35、定理 3.36、定理 3.37 对于角的关系也都有类似的定理成立.

定理 3.38 三角形的外角大于任一不相邻的内角.

定理 3.39 任一三角形至少有两个锐角.

定理 3.40 在任一三角形里,大角对大边,大边对大角.

定理 3.41 垂线段比斜线段短.

定理 3.42 三角形的任一边小于另外两条边之和,而大于它们的差.

定理 3.43 任一线段短于任一连结它的端点的折线.

下文将讨论"移动"这一概念. 在 Euclid 那里,移动是作为基本概念引进的,而且是在缺乏根据的情形下引进的,然后再将合同概念作为派生概念引进. 但在 Hilbert 系统里,如前所知,已将合同概念作为基本概念引进,而"移动"将作为派生概念定义之.

今设 Σ 和 Σ' 为任给的两个点集,并在它们之间建立了一一对应. 而 M 和 N 为 Σ 的两个点,它们决定线段 MN,又 M' 和 N' 为 Σ' 中与 M 和 N 相对应的点,它决定线段 $M'N'$. 我们特称 $M'N'$ 为 MN 的对应线段.

定义 3.15 今设点集 Σ 与 Σ' 之间一一对应,而且对应线段总是互相合同的. 则称 Σ 与 Σ' 是合同的,或者说点集 Σ 和 Σ' 的每一个可由另一个的移动而得,或者说点集 Σ 和 Σ' 中的一个能重叠在另一个上面. 而 Σ 和 Σ' 的对应点叫做在移动下重合的点.

定理 3.44 直线上的点经过移动,仍为位于直线上的点.

定理 3.45 平面上的点集经过移动,仍为平面上的点集.

定理 3.46 设 A、B、C 是点集 Σ 的任意三个点,而 A',B',C' 是 Σ 的对应点集 Σ' 里分别对应于 A、B、C 的点,则 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

定理 3.47 今设 A,B,C,D 是点集 Σ（也称图形 Σ）的四个不在同一平面上的点，A' 是空间任一点，a 是过 A' 的任一直线，α 是过 a 的任一平面，则点集 Σ 可经过移动而使 A 与 A' 重合，B 落在 a 上，C 落在 α 上，而 D 落在 α 的某一预先指定的一侧.

定义 3.16 设图形 Σ 合同于 Σ'，A,B,C，为 Σ 中不在一直线上的三点，A',B',C' 为 Σ' 中分别对应于 A,B,C 的三点. 如果 Σ 中位于平面 ABC 上的每个点均与 Σ' 中的对应点相重合，而 Σ 与 Σ' 中其余各对对应点都对称地落在平面 ABC 的两侧，并且 Σ' 的每一点的位置均由 Σ 的对应点唯一确定，则称图形 Σ 和 Σ' 对于平面 ABC 是对称的.

完全类似地，可给出平面上两个图形对于直线 a 是互相对称的定义. 并在平面上对于直线相对称，或空间中对于平面相对称的两个图形或点集叫做互相镜面反射的.

定理 3.48 设图形 Σ 里不在一直线上的点 A,B,C 与合同图形 Σ' 中的对应点 A',B',C' 重合，则要么 Σ 的每个点与 Σ' 中的对应点重合，要么 Σ 和 Σ' 对于平面 ABC 是对称的.

定理 3.49 设 A,B,C 是图形 Σ 的不在一直线上的三个点，A' 是 A,B,C 所在平面上任一点，a 为此平面上过 A' 的任一直线，则 Σ 可经移动而使 A 与 A' 重合，B 落在 a 上，而 C 落在 a 的某一预先指定的一侧.

定理 3.50 平面上图形 Σ 的不同两点 A,B 与合同图形 Σ' 的对应点 A',B' 重合，则要么 Σ 的每个点与 Σ' 里的对应点重合，要么 Σ 与 Σ' 对于直线 AB 是互相镜面反射的.

我们也可把整个空间所有的点组成的点集 Ω 与平面上所有的点组成的点集 ω 都当作图形，而图形的移动概念当然也适用于 Ω 和 ω.

定义 3.17 图形（包括 Ω 和 ω）的移动，如果其中某一点留在原来的位置不动，则称为绕着点 O 的旋转，并称 O 为旋转中心.

定义 3.18 图形的移动（Ω 和 ω 也一样），如果图形中在某直线 a 上的点都留在原来的位置，则该移动叫做绕着直线 a 的旋转，a 称为旋转轴.

定义 3.19 如果图形（包括 Ω 和 ω）的移动满足如下三个条件：(a) 图形中在直线 a 上的点经过移动后还在直线 a 上，(b) α 是过 a 的任一平面，图形中在 α 上的点经移动仍在 α 上，并且在 a 的原来一侧，(c) 图形中不在 α 上的点经移动后仍在 α 的原来一侧. 那么，我们称这个移动为沿着直线 a 的直移.

定义 3.20 设 M 为图形 Σ 的任意点，如果第一个移动将 M 变为它的对应点 M'，接着第二个移动又把 M' 变为它的对应点 M''，那么可以认

为存在变换使得 Σ 的 M 变为 M''，特称这样的变换为移动的乘积.

定理 3.51 两个移动的乘积仍是一个移动.

定理 3.51 具有重要地位，它所说明的性质称为移动的可群性. 有了移动的可群性，就能考虑将某个移动化为一些简单移动的乘积.

定理 3.52 任何一个移动都能表示为直移和旋转的乘积.

前文已在前三组公理的基础上建立了线段的可比较性①，下文将在前四组公理的基础上建立线段的测量理论. 为之，首先要建立关于线段长度的概念.

定义 3.21 如果对应于每个线段的正数满足如下三个条件：(a) 设与任意两个线段 AB，CD 依次对应的正数是 a 和 b，则当 $AB \equiv CD$ 时，必有 $a = b$；(b) 设 B 是线段 AC 的点，并且与线段 AB，BC，AC 依次对应的正数是 a，b，c，则有 $c = a + b$；(c) 正数 1 对应于某个线段 OO_1. 如此，我们就把对应于线段的正数称为线段的长度. 且把对应于正数 1 的线段称为线性单位或测量长度的单位.

然而问题在于定义 3.21 中的与每个线段相对应且满足诸条件的正数是否存在？如果存在，又是否唯一？对此，下述定理将从正面作出肯定的回答.

定理 3.53 线段的长度存在且唯一，亦即对于任一线段 AB，在选定某一线段作为线性单位后，必有唯一确定的正实数 a 作为 AB 的长度.

现在反过来，对于任一正实数 $a > 0$，是否总有长度为 a 的线段存在呢？下述定理对此作出肯定的回答.

定理 3.54 在线性单位选定后，对于任一正实数 $a > 0$，必有一线段 AB，其长度为 a.

定理 3.55 任给一线段 AB 和任取一正整数 n，则在 AB 中总存在着将 AB 等分为 n 等分的那些点.

现类似于线段长度的讨论，引进关于角的角度概念.

定义 3.22 如果对应于每个角的正数满足如下三个条件：(a) 等角对应于相等的数；(b) 设射线 l 过 $\angle(h,k)$ 的顶点且位于其内部，又与 $\angle(h,l)$，$\angle(l,k)$ 和 $\angle(h,k)$ 依次对应的正数是 α、β、γ，则必有 $\alpha+\beta=\gamma$；(c) 正数 1 对应于某个角 $\angle(O,O_1)$. 如此，我们就把对应于角的正数称为角的角度，且把取为对应于正数 1 的角 $\angle(O,O_1)$ 称为单位角或角度的单位.

---

① 前述定理 3.35 确立了线段比较的所谓三分律.

定理 3.56 设在取定了单位角以后之直角的角度为 α，则对大于 0 而小于 2α 的任何数 β，总有角度为 β 的角存在且唯一确定.

定理 3.57 任给一个角 $\angle(h,k)$ 和任取一正整数 n，则总有过 $\angle(h,k)$ 之顶点，且位于它内部的，将 $\angle(h,k)$ 等分为 n 个相等部分的射线.

有了以上的讨论，我们就能在直线、平面和空间建立坐标系统. 众所周知的坐标系统就是 Descartes 坐标系统.

定理 3.58 对于任何实数 x，在取定了坐标原点和线性单位的直线 a 上，有且仅有一个点 M，其坐标为 x.

在直线上一旦建立了坐标系统后，便可证明下述命题为真.

定理 3.59 由直线上一切点构成的有序集合与全体实数组成的有序集合之间，可以建立起保序的一一对应关系.

通常，大家把定理 3.59 中所揭示的那个关于直线的性质称为连续性，而证明定理 3.59 的根本基础在于公理 IV_1 和 IV_2，因而第四组公理又叫做连续公理.

在这里，我们还要指出，在 Hilbert 的 Euclid 几何公理系统中，第四组连续公理有一个重要的等价命题，即所谓关于直线上所有点的 Dedekind 割切原理. 现叙述如下.

如所知，在古典实数论中，关于全体实数的 Dedekind 割切原理是很著名的. 该原理被陈述为：

若将全体实数分成两类，使得(A) 任一实数 x 在且只在一个类里，并且每一类都是非空的；(B) 第一类的每个实数都小于第二类的每个实数. 如此，我们结论：要么第一类中有一个最大的实数 C，要么第二类中有一个最小的实数 C.

由定理 3.59 和实数的 Dedekind 割切原理，可直接推知下述关于直线上所有点的 Dedekind 割切原理为真.

若将某直线上所有的点分成两类，使得(A') 该直线上任何一点 m 在且只在一个类里，并且每一类都是非空的；(B') 第一类的每个点都在第二类的每个点的前面. 如此，我们结论：要么第一类中有末元 m^* (即对第一类中之任何点 m，总有 $m \prec m^*$)；要么在第二类中有首元 m^* (即对第二类中任何点 m，总有 $m^* \prec m$).

读者若有兴趣研究，如何由第一、二、三组公理和直线上全体点的 Dedekind 割切原理推出连续公理 IV_1 与 IV_2，可查阅文献[5] 之 1.2 节的相关内容. 在那里，还有关于长度、角度之存在性与唯一性的仔细讨论，以及如何建立 Descartes 坐标系统等内容.

设有一半径为 r 的圆，则称与圆心 O 的距离小于 r 的点为圆内部的点，与圆心的距离大于 r 的点为圆外部的点，又与圆心的距离等于 r 的点为圆周上的点.

定理 3.60 任给一半径为 r 的圆，在此圆周所在平面上有一直线 a 通过圆内部的点，则 a 与此圆的圆周有两个交点.

定理 3.61 对于平面 α 上的直线 a,b,c，如果 c 与 a,b 相交并有相等的内错角，则 a 和 b 是平行的.

定理 3.62 对于平面 α 上的直线 a,b,c，如果 a 和 b 同时垂直于 c，则 a 与 b 平行.

定理 3.63 平面上已知直线外的任一点，至少可以引一直线平行于该已知直线.

定理 3.63 是 Hilbert 的 Euclid 系统里的平行线存在性定理. 但迄至目前为止，尚未使用过平行公理 V，因而所述定理都在绝对几何系统中，并为 Euclid 几何系统与 Лобачевский 几何系统所共有. 下文所列定理则为 Euclid 几何系统所仅有.

定理 3.64 平面上的两条平行线与第三条直线相交，则所得内错角相等.

定理 3.64 为定理 3.61 的逆定理，其证明过程中要用到平行公理 V.

定理 3.65 任意三角形的内角和等于两直角，即 $\sum(\triangle) = 2d$.

在 Hilbert 的 Euclid 几何系统里，任何命题的证明都有根据，而不再依赖于图形直观这一事实，至此已经充分显示.

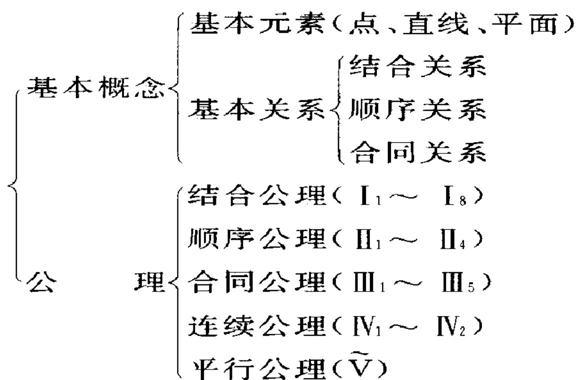
1.4 Лобачевский 几何公理系统

我们在 1.2 节中曾已论及 Лобачевский 创立非 Euclid 几何的思想与信念，还述及所谓罗氏公设等等. 通过 1.3 节关于 Hilbert-Euclid 几何公理系统的陈述和讨论，让我们在这里正规地讨论和陈述罗氏公设和 Лобачевский 几何公理系统. 我们把前文所述之罗氏公设正规地叫做 Лобачевский 平行公理，并重新陈述如下：

$\widetilde{\mathrm{V}}$（Лобачевский 平行公理） 过平面上任一已知直线外的一点，至少能引两条直线与该已知直线永不相交.

如此，Лобачевский 平行公理 $\widetilde{\mathrm{V}}$ 与 Euclid 平行公理正好相反. 又 Лобачевский 几何公理系统由绝对几何的四组公理（即 Hilbert 的 Euclid

几何公理系统中的第一、二、三、四组公理）外加上述公理 $\widetilde{V}$ 构成. 其基本结构如下表所示：



首先应该指出，凡是绝对几何系统中的定义、概念和定理在 Лобачевский 几何系统中全部生效①，因而 1.3 节中所列之前面 63 个定理，在 Лобачевский 几何系统中全部成立，因为对这些定理的证明都不涉及 Euclid 平行公理.

现在，让我们逻辑地依次陈述涉及公理 $\widetilde{V}$ 的概念和定理，因而它们仅为 Лобачевский 几何系统所具有，即均非 Euclid 几何学的定理. 又限于本书的篇幅和性质，除个别定理外都不予推演和论证.

定理 4.1　对于平面 α 上二不相交直线和第三直线皆相交时，形成的内错角可以不相等.

定理 4.2　$\sum(\triangle) < 2d, S_\alpha^{\angle} < d, L_\alpha^{\angle} < d$.

定理 4.3　任何四角形的内角和小于 $4d$.

定理 4.4　在锐角的一条边上，并非任一点引它的垂线总与另一边有交点.

定理 4.5　平面 α 上不存在这样的点 A 和不通过 A 的直线 a，能使得过 A 在 α 上只能引一条直线与 a 不相交.

定理 4.6　过平面上已知直线 a 外一点 A，能在该平面上引无穷多条直线与 a 不相交.

证明　如图 4.1 所示，点 A 是直线 a 外的一点，由 $\widetilde{V}$ 知过 A 至少可

---

①　这里要注意，Euclid 几何中关于平行线的定义和存在性，在绝对几何系统中即已给出，但是 Euclid 与 Лобачевский 两个几何系统中，关于已知直线之平行线概念是不一样的，下文会论及. 因此，在那些涉及平行线概念的定理的陈述中，要区别其中不同含义. 如果不怕麻烦，就避免使用 Euclid 意义下平行线这个词，而一概说成同一平面内两条直线无公共点或不相交之类即可.

引两条直线 a_1 与 a_2 均与 a 不相交. a_1 将平面分为两侧,因 a 与 a_1 无公共点,故 a 在 a_1 的某一侧,a_1 与 a_2 交于 A,故 a_2 由 A 决定的两条半直线分别落在 a_1 的两侧,今于 a_2 上与 a 处在 a_1 异侧的半直线上取一点 B_2,故 B_2 与 a 处在 a_1 的异侧. 又在 a 上取一点 B,故 B 与 B_2 在 a_1 的异侧. 故线段 BB_2 与 a_1 必有一交点,记为 B_1. 又 M 为线段 B_1B_2 的任意点,现在我们断言直线 AM 与 a 没有公共点. 否则,设 AM 在 A 到 M 那个方向与 a 相交于点 C. 则考虑三角形 MBC 和直线 a_1,因直线 a_1 与 $\triangle MBC$ 的 MB 边交于 B_1,故由 II_4 知 a_1 应与 BC 相交(因 a_1 与直线 AM 已有一交点 A,故不会再与 MC 有交点),即 a_1 与 a 有公共点,这与原设相矛盾. 同理可证直线 AM 由 M 到 A 的方向也不会与 a 相交. 故直线 AM 与 a 不相交. 而线段 B_1B_2 上有无穷多个象 M 那样的点,实际上,我们已经证明了凡是过 A 而位于 a_1,a_2 所组成的一对对顶角内部的任一直线均与 a 不相交. □

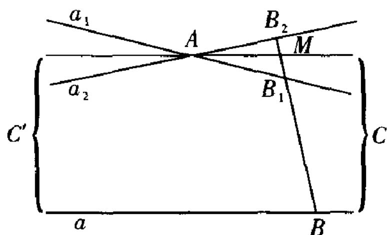


图 4.1

上文的一个注释中指出,Euclid 与 Лобачевский 两个几何系统中对于已知直线的平行线概念有所不同. 现在我们可以转向 Лобачевский 系统中关于平行线概念的讨论. 如图 4.2 所示,A 为已知直线 a 外的一点,AD 垂直于 a,我们说直线 AD 将平面分为左、右两个半平面,a 将平面分为上、下二平面,而点 A 在上半平面,过 A 引直线 a' 使之与 AD 相垂直,由定理 3.62 知 a 与 a' 在 Euclid 意义下相平行,即永不相交. 另一方面,由定理 4.6 知,过点 A 还存在着无穷多条异于 a' 的直线也与 a 没有公共点,在这无穷多条直线中的任何一条位于右半平面内的半直线与半直线 AD 构成的 $\angle\alpha$ 不等于 d,这种角的最大下界记为 $\angle\alpha^*$,$\angle\alpha^*$ 的一边是 AD,另一条边记为 a_1,a_1 与 a 没有公共点,否则,若设 a_1 与 a 相交于 P 点,则可在 a 上位于点 P 的右侧再取一点 M,连结 A 和 M,则一方面,按 $\angle\alpha^*$ 作为上述 $\angle\alpha$ 的最大下界,应有 $\angle\alpha^* > \angle DAM$;另一方面,又有 $\angle\alpha^* = \angle DAP < \angle DAM$,矛盾. 故 a 与 a_1 无公共点. 又易见 $0 < \angle\alpha^* < d$. 同样的讨论适用于左半平面的情形,并得对称于 a_1 且过 A 的直线 a_2,a_2 也与 a 不相交. 特称 a_1 为右界限直线,a_2 为左界线直线. 既然 a_1 与 a_2 是过 A

且不与 a 相交的二直线，则由定理 4.6 及其证明过程可知，凡过 A 且位于 D 点所不在的那双对顶角内部的直线，皆不与 a 相交，过 A 而位于另外一双对顶角内部的直线均与 a 相交.

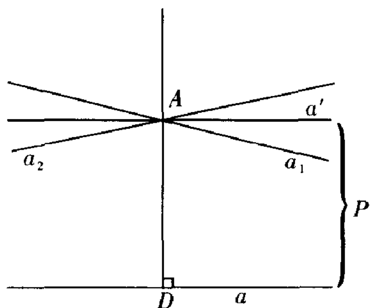


图 4.2

在平面 α 上已知直线 a 和 a 外一点 A，过点 A 的所有直线可分为两类：一类是与 a 相交的；另一类是与 a 不相交的. 而上述左、右界限直线应当归属在与 a 不相交的那一类，并且它们又是两类直线中的分界直线. Лобачевский 就把这两条界限直线命名为直线 a 的过点 A 的平行线. 且称右界限直线为已知直线的右向平行线，而左界限直线为其左向平行线. 除了这两条平行线之外，一切其余的过 A 而与 a 不相交的直线叫做已知直线的离散直线. 至此，已足见 Лобачевский 意义下的平行线概念不同于 Euclid 意义下的平行线定义. 最后，我们还得用定义的形式将所讨论之 Лобачевский 意义下的平行线概念陈述之.

定义 4.1　设有平面 α 上一已知直线 a 和 a 外一点 A，$\mathfrak{S}$ 表示过点 A 的所有与 a 不相交的直线构成的集合，而 a' 为 $\mathfrak{S}$ 中的一条界限直线，则称 a' 为 a 的过点 A 的平行线. 如果 a' 是右界限直线，则称 a' 为 a 的过 A 的右向平行线，又若 a' 为左界限直线，则称 a' 为 a 的过 A 的左向平行线.

在上述平行线定义之下，自然会产生一系列提问，诸如对于直线 a 的一条平行线 a'，是否与 a' 通过 a' 上的某一点的特殊位置相关？平行线概念有无相互性和传递性？如此等等. 这些问题将会通过下文列出的一些定理得到回答.

定理 4.7　设平面 α 上任给一已知直线 a 和 a 外一点 A，而直线 a' 为 a 的过点 A 的右向(左向)平行线，而 E 为 a' 上异于 A 的任一点，则 a' 也是 a 的过 E 点的右向(左向)平行线. 亦即 a 的右向(左向)平行线 a' 与 a' 通过 a' 上某一点的特殊位置无关.

定理 4.8　设直线 a' 是直线 a 的一个确定的方向上的平行线，则 a

也是 a' 在同一个方向上的平行线.

定理 4.9 在平面 α 上任给二直线 a 和 a'，今由 a' 上的一点 O 作 a 的垂线，垂足为 D，又设 a' 与射线 OD 所构成之邻补角互不相等，对于 a' 上的点 M 沿着顶 O 的钝角所在一侧变动，若将线段 OM 之长记为 x，把由 M 到 a 上的垂直距离记为 $f(x)$（此 $f(x)$ 是以 x 为自变量的函数），我们断言：$f(x)$ 是一个无上界的单调上升且连续的函数.

定理 4.10 任给一角 $\angle(h,k)$，x 为其边 h 上任一点到角顶的距离，而该点到另一边 k 上的垂直距离记为 $f(x)$，则 $f(x)$ 为一无界的、单调上升的连续函数.

定义 4.2 设直线 a 在某一确定的方向平行于直线 b，O 为 a、b 所在平面上的一点，如果 O 到 a 与 b 的垂直距离（简称距离）相等，则称连结两垂足的直线 l 为 a 和 b 的等倾割线.

利用定理 4.10 不难证明等倾割线的存在性，并且易证下述定理为真.

定理 4.11 设直线 a 在某一确定的方向平行于直线 b，则直线 l 是 a、b 之等倾割线的充要条件是：l 各与 a、b 在确定的方向组成相等的同侧内角.

定理 4.12 设平面 α 上直线 a 和 b 在同一个方向平行于直线 c，则 a 和 b 也在同一个方向互相平行.

定理 4.13 设 a 和 b 为平面 α 上某一确定的方向互相平行的两条直线，则 a 和 b 在平行的那个方向无限地接近，而在反方向是无限地远离.

定理 4.14 如果平面 α 上二直线 a 和 b 同时垂直于第三条直线 c，则 a 和 b 是离散的.

定理 4.15 如果平面 α 上二直线 a 和 b 与第三条直线 c 相交成相等的同位角或相等的内错角，则 a 和 b 是离散的.

定理 4.16 设 a 和 b 为平面 α 上互相离散的两条直线，则 a 和 b 在左、右两个方向上都是无限地远离的.

定理 4.17 平面 α 上二直线 a 和 b 互相离散的充分必要条件是 a 和 b 有一条公垂线.①

现在，我们要引进 Лобачевский 意义下的所谓平行距和平行角的概念，并进一步明示其间的性质和关系.

定义 4.3 设 A 为平面 α 上已知直线 a 外的一点，a_1 与 a_2 各为 a 的

---

① 在平面 α 上之二直线 a 和 b，若第三条直线 c 同时垂直于 a 和 b，则称 c 为 a 和 b 的公垂线，读者可自行证明平面上任二直线，至多只有一条公垂线．此等情况也与 Euclid 几何中的相关情况大异其趣.

过点 A 的左向与右向平行线，过点 A 作 a 的垂线，垂足为 D，则射线 AD 与 a_1 或 a_2 所构成的锐角称为点 A 对于直线 a 的平行角，记为 $\angle\omega$，而线段 AD 之长，即 A 到 a 的距离，又称为相应于平行角 $\angle\omega$ 的点 A 对直线 a 的平行距，记为 x.

定理 4.18 两个平行角相等的充分必要条件是它们所相应的两个平行距相等.

由定理 4.18 可知，平行角决定于其相应的平行距，反之，平行距也由其平行角完全决定，平行角将随其相应的平行距的变化而变化. 因之，Лобачевский 用记号 $\omega=\pi(x)$ 来表示平行角 $\angle\omega$ 与其相应的平行距 x 之间的函数关系，人们称之为 Лобачевский 函数.

定理 4.19 Лобачевский 函数单调递减.

定理 4.20 任给一个锐角 $\angle\omega$，必存在一长度为 x 的线段，使得 $\angle\omega=\pi(x)$. 即任何锐角都是一个平行角.

定理 4.20 表明 Лобачевский 函数 $\pi(x)$ 之值域（记为 ran $\pi(x)$）为集合 $\left\{\alpha \mid 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right\}$①，又由定理 4.19 知 $\pi(x)$ 是其定义域（记为 dom $\pi(x)$）上的单调函数. 故由微积分的知识可知 $\pi(x)$ 是 dom $\pi(x)=\{x \mid x>0\}=(0,-\infty)$ 上的连续函数. 综上几个相关定理的讨论，便可概括陈述如下的定理.

定理 4.21 Лобачевский 函数是 $(0,+\infty)$ 上的单调递减的连续函数. 并且当 $x\to 0$ 时，$\pi(x)\to\frac{\pi}{2}$；而当 $x\to\infty$ 时，$\pi(x)\to 0$. 亦即平行距 x 和平行角 $\angle\omega=\pi(x)$ 之间有关系：$\lim\limits_{x\to 0}\pi(x)=\frac{\pi}{2}$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\pi(x)=0$.

定理 4.21 是一条意义重大的定理. 因为它揭示了 Euclid 几何与 Лобачевский 几何的一种关系，那就是 Euclid 几何所刻画的空间结构，乃是 Лобачевский 几何所规定的空间结构在其平行距趋向于 0 时的一种极限状况. 或者非数学语言地说，宏观的宇宙空间结构更接近 Лобачевский 几何系统的空间结构，而微观的常识空间结构才几乎是 Euclid 几何系统的空间结构. 据说 Gauss 曾测量三大城市所围成之三角形的内角和，借以验证他的发现，结果大失所望，因为所获结果依然是 $\sum(\triangle)=2d$. 而今人们测量宇宙空间三大恒星所围成之三角形之内角和时，却能获结果

① 至于平行角 $\angle\omega$ 必为锐角一事，已于前文讨论 Лобачевский 平行线概念的过程中明确.

$\sum(\triangle) < 2d$，为什么？读者不妨以定理 4.21 为根据去议论或解释.

下文所列的若干定理，将表明 Лобачевский 几何学中的一些有趣的性质.

定理 4.22 设 a 和 b 为两条互相离散的直线，则其中任一直线上各点到另一直线上的投影，只能填满其上的一个有限线段.

基于定理 4.22，我们可以得到一个貌似"四角形"的图形. 如图 4.3 所示，其四"边"及其"对角线"都在箭头所示的方向互相平行. 不仅如此，还可进一步证明，在 Лобачевский 平面上，并非过锐角内部的任何点，总可引直线使之与该角两边同时相交.

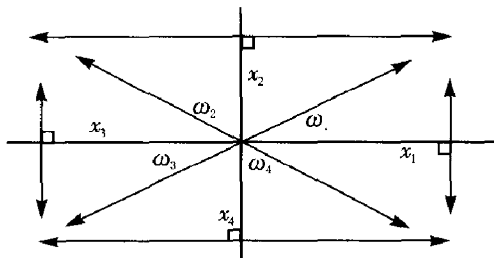


图 4.3

定理 4.23 三角形两边中点的连线必与第三边所在直线互相离散，并且它们之唯一确定的公垂线必定通过第三边的中点.

定理 4.24 设 A，B，C 三点共线，D 为该直线外的一点，又 A'，B'，C' 依次表示线段 DA，DB，DC 之中点，则 A'，B'，C' 三点必不能在一直线上.

下文我们将刻画 Лобачевский 空间里直线和平面之间的一些基本关系. 因而不时会涉及一些属于绝对几何系统中的立体几何的概念或定理. 当然，其中的一部分已在 1.3 节列出，但也会有一些要用到的命题和概念迄未写出，诸如"过空间一点能且只能引一直线垂直于已知平面"，"两个半平面，有公共的边界直线而不在一个平面上，它们组成一个二面角，组成二面角的半平面叫做它们的界面，它们的公共直线叫做棱"，如此等等. 但这些定义或定理均可在中学的立体几何教材中查到，在此不一一列举了. 只是在行文中作"根据空间绝对几何知识"一类声明，并用记号(AG)简记之.

定义 4.4 如果空间二直线 a 和 b 在同一平面 α 上，并且 a 和 b 在 α 上互相平行(离散)，就说 a 和 b 在空间互相平行(离散).

定义 4.5 若直线 a 在确定的方向平行于其在平面 α 上的射影(见 AG)的话，则说 a 在该确定的方向平行于 α，又若 a 与其在 α 上的射影互

相离散的话，则说 a 与 α 是互相离散的.

定理 4.25 如果直线 a 与平面 α 在确定的方向上互相平行，则 a 与 α 在平行的方向上无限接近，而在相反的方向上无限远离.

定理 4.26 直线 a 和平面 α 互相离散，当且仅当 a 和 α 有一条公垂线.

定理 4.27 设空间二直线 a 和 b 互相平行，又平面 α 和 β 分别通过 a 和 b，又 α 和 β 交于直线 c，则 c 也在 a 和 b 的平行方向分别平行于 a 和 b.

定理 4.28 设空间二直线 a 和 b 平行，C 为空间一点，则过点 C 有且只有一直线 c 在 a 和 b 的平行方向同时平行于 a 和 b.

定理 4.29 设直线 a 和 b 在同一个方向分别与第三条直线 c 平行，则 a 和 b 也在该方向互相平行.

定理 4.30 设直线 a 和平面 α 上一直线 b 在确定的方向平行，则 a 在同一个平行方向与 α 平行.

定理 4.31 空间二平面相交的充分必要条件是过其中一平面上任一点，总可引两条直线，使之各在确定的方向平行于另一平面.

定义 4.6 对于空间的两个不同的平面而言，如果过其中之一平面上的某一点，能且只能在该平面上引一条直线平行于另一个平面，则称这两个平面互相平行.

定理 4.32 如果空间二平面互相平行，则过其中任一平面上之任一点，能且只能在该平面上引一直线平行于另一个平面.

定义 4.7 对于空间二平面，如果其中任何一个平面上都不存在平行于另一平面的直线，则称此二平面互相离散.

定理 4.33 空间二平面互相离散的充分必要条件是它们有一条公垂线. 这样的公垂线是唯一的，并且此公垂线二垂足之间的距离为二平面之间的最短距离.

定义 4.8 设 α 为空间一平面，A 为不在 α 上的一点，则称过点 A 且平行于 α 的所有直线的几何轨迹为 α 的以 A 为顶点的平行锥面，记为 K_α.

读者不难逻辑地想像，要得到平面 α 的以 A 点为顶的平行锥面 K_α，只要先过点 A 作 α 的垂线，垂足为 D. 然后过 A 引 α 的一条平行线 a，然后让 a 绕轴线 AD 旋转一周，即得 K_α. 另外，过点 A 的每一条平行于 α 的直线，在其平行方向与射线 AD 构成平行角 $\angle\omega = \pi(AD)$. 又从前文所指出的那个意义重大的定理 4.21 看出，当锥顶 A 无限远离 α 时，则 K_α 将退化为轴线 AD，而当锥顶 A 无限接近平面 α 时，K_α 又将退化为平面 α.

现考虑过 K_α 之顶点 A 的一个平面 α^*；如果 α^* 与 K_α 相交于 K_α 的两条母线时，则 α^* 与 α 相交，又若 α^* 与 K_α 相切于一条母线时，则 α^* 与 α 平

行，再当 α' 不包含 K_a 之任何母线时，则 α' 与 α 离散.

定理 4.34 设 α 为空间一平面，a 为平行于平面 α 的一直线，则过 a 而不与 α 相交的平面只有一个.

最后，我们还要对 Лобачевский 几何系统中的若干特殊曲线与曲面，以及它们之间的一些关系与性质加以刻画和讨论. 为此，我们还要重提 1.3 节中引进的"移动"概念，并作进一步讨论. 如所知，我们在那里曾已论证了每个移动 $\mathfrak{S}$ 总可表示为直移 $\mathfrak{S}'$ 和旋转 $\mathfrak{S}''$ 的乘积，当然，$\mathfrak{S}$ 也可能本身就是直移或旋转.

定义 4.9 设 c 为平面 α 上一曲线，$\mathfrak{S}$ 是 α 的一个移动. 如果 c 在 α 的移动 $\mathfrak{S}$ 下仍保有 c 的位置，则称 c 对移动 $\mathfrak{S}$ 是不变的，或称曲线 c 对移动 $\mathfrak{S}$ 具有不变性.

例如，在 Euclid 平面上，以 O 为中心的圆周 c，对以 O 为中心的旋转（移动）$\mathfrak{S}''$ 是不变的，又直线 u 的平行线 l 对于沿着 u 的直移（移动）$\mathfrak{S}'$ 也是不变的. 在 Лобачевский 平面上，对于以 O 为中心的旋转（移动）具有不变性的曲线 c，也是以 O 为中心的圆周. 但对沿着直线 u 的直移（移动）具有不变性的曲线 c，却与 Euclid 平面上的情况大不相同，再不是 u 的平行线之类了. 下文将对此进行分析讨论.

定义 4.10 设 u 为平面上一直线，则在 u 的同一侧并与 u 保持等距离的点的几何轨迹，被称为以 u 为底的一条等距线，简称为等距线. u 叫做等距线的底. 又等距线上之点到其底的距离称为该等距线的高.

定理 4.35 如果等距线的高 $h>0$，则此等距线不是直线，并且任何直线与任何 $h>0$ 的等距线至多只有两个交点.

定理 4.35 告诉我们，任何 $h>0$ 的等距线不是直线. 但人们又把任何直线视为以其自身为底且高为 0 的等距线，这当然是特殊情形.

定理 4.36 等距线 c 对于沿着它的底 u 的直移（移动）具有不变性.

如所知，在本节的前文中，曾给出所谓等倾割线的概念，并指明过诸如充要条件之类的一些性质，现再补充几条对下文讨论有用的性质.

定理 4.37 设直线 a 和 b 互相平行，则过 a 或 b 上任一点，能且只能作 a 和 b 的一条等倾割线.

定理 4.38 设 a,b,c 为平面 α 上在同一个方向互相平行的三直线，点 A,B,C 分别在 a,b,c 上，而且直线 AB 和 BC 正好各为 a,b 和 b,c 的等倾割线，则直线 AC 必为 a 和 c 的等倾割线.

现在我们要研究 Лобачевский 平面的一种特有的移动. 并把这种移动命名为绕着无穷远点的旋转，记为 $\mathfrak{S}_\infty$. 今设平面 α 上沿着某一确定的

方向给定了一个互相平行的直线束，根据定理 4.13 可知，该束直线将在它们的平行方向彼此无限地接近. 为此，让我们设想这束直线在无穷远点 O_∞ 处凝聚. 但应注意，此处所说 O_∞ 仅仅是某种说法上的方便，并不表示在此引进了什么新概念或新几何元素，即在此处除了论及平行直线束之外，没有增添任何新东西.

定义 4.11 设 E 表示平面 α 上沿某一确定方向互相平行的某个直线束，如果在 α 的一个移动过程中，使得 E 的直线 a 与 E 的直线 a' 重合，而且当 a 的点 A 与 a' 的点 A' 重合时，直线 AA' 是 α 未经移动前之 a 与 a' 的等倾割线，则称此移动为 α 绕着无穷远点 O_∞ 的一个旋转，并记为 $\mathfrak{S}_\infty$.

定义 4.11 表示，对于直线束 E 中的每条直线经过 $\mathfrak{S}_\infty$ 这样的移动后，还是变到 E 中之直线，并且在它们重合时的任何一对对应点，总决定着它们的一条等倾割线. 此外，设 l 为直线 a 与 b 的等倾割线，又鉴于定理 4.37 之唯一确定性，我们特称 l 与 a，b 之交点 A 和 B 为等倾割线 l 的决定点.

定义 4.12 设点 A 在平面 α 之直线 a 上，在 α 上由点 A 到在确定方向与 a 平行之每一直线作等倾割线，则称所有这些等倾割线的决定点（包括点 A）的几何轨迹为极限圆.

对于定义 4.12 所引进的极限圆概念，我们也可等价地按如下方式刻画之：如果对于平面 α 上的曲线 λ，存在着在确定方向互相平行的直线束 E，对于 λ 的任何点总在 E 的某条直线上，并且对于 λ 的任何弦经过延长而成的直线，总是 E 中过此弦的端点之二直线的等倾割线，则称此曲线 λ 为极限圆.

现在的问题是如上所引进的极限圆是否存在？我们的回答是肯定的，因为我们可按如下步骤去把极限圆构作出来. 首先在平面 α 上给定一直线 a，并选定 a 的一个确定的方向，又用 E 表示 a 在所选方向的所有平行直线所组成的直线束，然后在 a 上取定一点 A，再在 E 内任选一直线 b，过 A 作 a 与 b 的等倾割线，该等倾割线在 b 上的决定点为 B，由定理 4.37 可知此点 B 是唯一确定的，于是我们令直线 b 在 E 内变动，即 b 在变动中始终与 a 在所选方向上互相平行，那么点 B 在此变动中所画出之曲线就是一个极限圆，并且一意确定. 还应指出，根据所说的做法可知，对于一直线上的一个点和该直线的一个确定的方向，就决定着一个极限圆. 人们也称该直线为该极限圆的轴线.

定理 4.39 极限圆对于平面 α 绕无穷远点 O_∞ 的旋转（移动）$\mathfrak{S}_\infty$ 具有不变性.

定理 4.40 极限圆不是直线，并且任何直线与任一极限圆至多有

两个交点.

定义 4.13 设直线 t 是以直线 u 为底的等距线 c 上一点的切线，如果 c 上除 M 点之外的任何点，均与 u 在 t 的同一侧，则称此等距线在点 M 是向底凹进或底凹的.

定义 4.14 设 S 是以直线 a 为轴的极限圆，特称直线 a 和 S 的其他轴线平行的方向为 S 的正向；又设直线 t 是 S 上点 M 的切线，如果 S 上除点 M 以外的点，都落在 t 的一侧，而且是 S 之正向所指的那一侧，则称此极限圆在点 M 是正向凹进或正凹的.

定理 4.41 等距线在它的每个点都是底凹的，等距线之底上的每一点的垂线，都是该等距线的法线.

定理 4.42 极限圆在它的每一点都是正凹的，极限圆的每条轴线都是它的法线.

定理 4.43 在平面 α 上任取两点 M 和 N，则有且仅有两个极限圆通过点 M 与 N，并且它们对称于直线 MN，因而当极限圆上两个弧段的弦合同时，则该二弧段也合同.

定义 4.15 设 α 为空间一平面，则所有在 α 同一侧且与 α 等距离的点的几何轨迹叫做以平面 α 为底的等距面，简称等距面，而平面 α 为此等距面的底，又等距面上任一点到其底 α 上的距离称为等距面的高.

定义 4.16 设点 A 在空间之某直线 a 上，在空间中，过点 A 到确定方向与 a 平行的每一直线作等倾割线，则称所有这些等倾割线的决定点（包括点 A）的几何轨迹为极限球.

定理 4.44 设 a,b,c 为空间不共面又在确定方向互相平行的三直线，点 A,B,C 顺次在 a,b,c 上，并且直线 AB 和 BC 正好是 a,b 和 b,c 的等倾割线，则直线 AC 必为直线 a,c 的等倾割线.

读者不难将前此有关等距线和极限圆的某些性质的讨论拓广到等距面和极限球上. 例如，基于定理 4.37，易见在空间中，选定一直线的一个确定的方向，以及该直线上一个点，也就唯一确定了一个极限球，且该直线可称为该极限球的轴线. 又如基于定理 4.44，易见过极限球上任一点，所引之在正向与轴线相平行的直线，依然是该极限球的轴线，又如过极限球上任二点的连线，总是过此二点之两条轴线的等倾割线. 如此等等，读者不妨逐一刻画明示之.

如所知，我们曾在 1.3 节中引进直移概念之前，描述过空间绕直线 a 旋转的一种移动. 那就是当空间经过移动后，如果直线 a 上的每个点都在原来位置不动的话，则称该移动为绕直线 a 的一个转动或旋转.

定理 4.45 等距面绕着其底的任一垂线的旋转(移动)具有不变性. 极限球绕着它的任一轴线的旋转(移动)也具有不变性.

今设点 D 为等距面 Σ_1 上任一点,过点 D 作 Σ_1 的底平面 α 的垂线 d,易见过直线 d 的任一平面 λ 与 Σ_1 的交线为一等距线 c,而 c 的底又正好是平面 α 与 λ 的交线 u,如所知,d 又为 c 的过点 D 的法线,因 c 上过点 D 之切线与 d 垂直. 由于所说过直线 d 的平面 λ 是任意取的,因而 Σ_1 上过点 D 的任一等距线在 D 点的切线皆与直线 d 垂直,所以它们位于同一个平面上,特称该平面为等距面 Σ_1 在点 D 的切平面,又因 d 垂直于此切平面,故 d 为 Σ_1 在点 D 的法线. 又由于 D 是 Σ_1 上任取的一点,故知等距面之底上的任一垂线都是该等距面的法线.

再设 M 为极限球 Σ_2 上的任一点,而 m 为 Σ_2 的过点 M 的轴线,易见过直线 m 作任意平面 α 与 Σ_2 的交线为一极限圆 S,而且 m 也是 S 的轴线. 如所知,直线 m 亦为极限圆 S 在点 M 的法线,因为直线 m 与 S 在点 M 的切线相垂直. 又因过直线 m 的平面 α 是任取的,故 Σ_2 上过点 M 的任一极限圆在点 M 的切线皆与直线 m 相垂直,因而它们位于一个平面上,我们称该平面为极限球 Σ_2 在点 M 的切平面,并因直线 m 垂直于此切平面而为 Σ_2 在点 M 的法线. 又因点 M 是 Σ_2 上任取的,故极限球的任一轴线都是该极限球的法线.

如上关于等距面 Σ_1 和极限球 Σ_2 的讨论,十分类同于过球心之任一直径都是球面之法线. 而球面之所有法线交于一点,极限球之所有法线在一个确定的方向互相平行,而等距面之所有法线同时垂直于它的底平面,因而所有这些法线互相离散.

定义 4.17 设 E 表示空间的一个直线束,如果 E 中每一对直线总是共面的,则称该直线束 E 为一个空间直线簇. 如果某直线簇的所有直线相交于一点,则称之为有心簇或椭圆簇. 如果直线簇之所有直线在同一个方向互相平行,则称之为抛物簇. 又若直线簇的所有直线都垂直于同一个平面,则称其为双曲簇.

如所知,相交二直线决定一平面,二平行直线必共面,又对于同时垂直于一个平面的二直线,也不难证明它们位于同一个平面上. 因而基于上文的讨论可知,球面之所有法线构成椭圆簇,极限球面之所有法线组成抛物簇,而等距面之所有法线却建成双曲簇. 不仅如此,在Лобачевский几何系统中,还有如下命题为真.

定理 4.46 在 Лобачевский 空间中,有且仅有椭圆、抛物、双曲三种类型的直线簇.

1.5 公理化方法

所谓数学系统的公理化方法，就是选取少数不加定义的原始概念（基本概念）和无条件承认的思想规定（公理）作为出发点，再以严格的逻辑推演，使某一数学分支成为演绎系统的方法.

首先，从认识论的角度来看，我们主张对任何系统的基本概念和公理的选取，必须客观地反映现实对象的本质和关系，也就是说，应该有其实际的直观背景或现实模型，这就是说，不能单凭主观臆造. 其次，从逻辑的角度来看，不能认为将一些概念和思想规定任意罗列与凑合，便能构成一个合理的公理系统. 须知一个有意义的公理系统，应当是一个协调（即无矛盾）的有机整体. 通常认为，所给之公理系统应满足如下三个条件.

第一（协调性） 对于公理的选取，不允许出现如此情况：从所取公理出发，既能证明某个结论 A 成立，同时又能证明结论 A 的否定也成立. 这叫做系统的协调性要求. 协调性也叫做相容性或无矛盾性. 如所选取之公理系统不能满足协调性要求，则该公理系统就叫做不协调或不相容系统，即矛盾系统.

第二（独立性） 在所选的公理表中，不允许有一条公理能用其他公理把它推导出来，这就是独立性. 因为能被其他公理推导出来的结论便可作为定理在系统内被证明出来，从而不必作为一种思想规定列举在公理表中. 总之，不要在公理表中出现多余的公理.

第三（完备性） 所谓完备性，就是要求所选的公理系统能导出所论数学分支的全部命题，这就是说必要的公理是不可少的，否则就不能确保将其所论数学分支的全部结果被推演出来.

至少从理论上讲，对于公理系统的如上三点要求是正当的和自然的. 至于某个公理系统是否满足或已满足上述要求，甚至能否在理论上证明满足上述要求的公理系统确实存在等，都是另外一回事. 须知针对一个公理系统要逐一验证上述三条要求，绝非轻而易举，往往不能完全实现. 通读本书，自然明白这一点.

公理化方法在近代数学的发展中起过巨大的作用，可以认为，它对各门现代数学都有极其深刻的影响. 而 Hilbert 于 1899 年出版的《几何基础》一书，乃是数学分支公理化的典范著作，该书问世后的 30 年间，曾引起西方数学界的一阵公理热，足见其影响之大.

公理化方法，首先是表述与总结科学理论的重要方法之一. 亦即公

理化方法具有分析、总结科学知识的作用. 凡是取得了公理化结构形式的理论,由于系统内诸命题均已按逻辑演绎关系串联起来,使用起来也有独到的方便之处. 应该说,公理化方法的第一步,就是积累大量的资料、数据和经验. 为了使这些资料和经验系统化,并且上升为理论,就要对资料和经验进行分析与归纳,使之上升为少数原始概念和不加证明的相互关系,从而形成公理系统;然后第二步,再从这少数基本概念和公理出发,经过综合与演绎,使之展开成为一个学科分支的理论系统. 这就是说,公理化方法的第一步是由现象到本质、从具体到抽象的过程;又第二步则是成长发展和不断形成演绎系统的过程.

其次,公理化方法又是创建新理论的重要方法之一. 例如,非欧几何学的诞生,导源于第五公设问题的研究和讨论. 若没有公理化方法应用于欧氏几何的研究,也就没有什么第五公设问题. 而且历史地看,古代对于第五公设问题的提出和求解,实际上体现了人们对于公理系统独立性的追求. 因而 Лобачевский 几何的创立,便是公理化方法创建新理论的典型范例之一. 又如代数方面,"抽象的、形式的或公理化的方向,在代数学的领域中造成了新的高涨,特别在群论、域论、赋值论、理想论和超复系理论等部门中引起了一系列新概念的形成,建立了许多新的联系,并导致了一系列深远的结果."[7] 总之,公理化方法的第二个作用,更在于它是推动和创建新理论的重要方法之一. 正由于公理化方法把一门数学的基础分析得清清楚楚,这就有利于比较各门数学的实质性异同,也有利于促使和推动新理论的创立.

在这里,我们还应简略地论及结构主义学派的概况. 那就是 20 世纪 30 年代左右,法国一批优秀的青年数学家,不满于老一代的守旧传统,怀着闯新路的热情,共同合作研究,成立讨论班,逐步形成一个数学学派. 该学派认为数学各分支应按结构性质来划分,他们运用公理化方法,把一些数学分支中最基本和最重要的作为出发点的思想规定分离出来,加以分析比较,形成结构系统,亦即应用公理化方法按结构观点重新整理各个数学分支,并希望全部数学或大部分数学都能被纳入这样或那样的结构系统中去,故被称之为结构主义学派. 他们计划宏伟,分工合作撰写出版了一大套书,总题目为《数学原本》(Elements of Mathematics),作者统一署名为 Nocolus Bourbaki. 其实并无 Nocolus Bourbaki 其人,实为这批年轻数学家所用的一个共同的笔名,因而结构主义学派又称为 Nocolus Bourbaki 学派. 1939 年,《数学原本》第一卷出版,到 1971 年已出版了 36 卷,当然并未出完. 数学诸分支在《数学原本》内,都要经过仔细的

结构分析，并被安放到适当的位置上，其中特别瞩目的是《数学史原本》，全书按结构观点阐述数学发展的历史. 结构主义学派在20世纪40～50年代，可谓盛极一时，追随者甚众，主要代表人物，首推J. Dieudonne，A. Weil，C. Chevalley，H. Cartan等.

结构主义学派认为，全部数学或大部分数学都可用公理化方法抽象出各种结构，找出各个数学分支间的结构差异，从而可以按照结构的不同而加以分类. 如此，便可给出一幅诸数学分支之内在联系的清晰图像. 结构主义学派首先将数学结构分为三大类：第一类称代数结构，诸如群、环、域、代数系统、范畴、线性空间等. 这是一种由离散性对象配以运算而形成的结构系统. 第二类称序结构，诸如半序集、全序集、良序集等. 第三类称拓扑结构，诸如拓扑空间、紧致集、列紧空间、连通集、连续性、完备性空间等. 他们称这三类结构为母结构. 再由母结构可以导出种种子结构，以及各种交叉结构、分支结构等. 例如，Hilbert空间（即H空间）就是由线性空间加上内积型拓扑所构成的数学系统，而其中线性空间是代数结构，内积型拓扑是拓扑结构，从而H空间是一种由代数结构与拓扑结构形成的交叉结构. 又如Banach空间（即B空间）也是一种交叉分支结构. 如所知，B空间即完备、赋范、线性空间. 再如拓扑群便是群结构（代数结构）上再定义拓扑结构的一门学科.

如所知，数学公理化仅着重于探讨各门数学分科的公理化方法，使之形成演绎系统. 结构主义则不仅如此，更从数学整体着眼，采取全局观点，着重分析诸数学分支之间的结构差异和内在联系. 同时对于诸数学分支，也综合分析其结构特征及其基本结构的构成方式，其基本方法则仍然是公理化方法. 正如前文所指出的，公理化方法既是分析、总结科学知识的方法，又是创建新理论的重要方法之一. 同样地，结构主义方法将大部分数学纳入各种结构系统，使得数学诸分支的内在联系和区别被分析得一清二楚，这也就大大有利于比较数学诸分支的实质性异同，从而和公理化方法一样，必将有利于促使新理论的发现和创立.

20世纪以来，正由于公理化方法在研究几何基础方面所取得的成就，促使公理化方法渗透到数学的许多其他分支，特别是现代数理逻辑中，公理化方法更是最为流行的方法，所以公理化方法对近代数学发展所产生的巨大影响，已是举世公认的事实. 不仅如此，公理化方法早已超越数学理论范围的应用，而进入了其他自然科学的领域. 例如，20世纪40年代，Banach完成了理论力学的公理化，物理学家还将相对论表述为公理化体系等. 因而数学公理化方法在科学方法论上起到了示范作用，

即对各门自然科学理论的表述方法起到了积极的借鉴作用.

在我们强调了公理化方法的意义和作用后,却应同时看到它的不足之处,对于公理系统的协调、独立和完备性要求,不仅在理论上难于完全满足,而且对于一些新兴数学分支,以及那些与生产实际密切相关之学科的发展,反而成了一种障碍. 如所知,当今许多人对于某种新理论的可接受性持有这样的观点,那就是要么它有坚实的理论基础,即使一时还看不出它有多大的应用价值,要么它有广泛的应用,即使它暂时还没有一个坚实的理论基础. 其实要有一个坚实的理论基础这个条件太苛求. 事实上,各门科学都不是按已有一个坚实理论基础之面貌诞生的,而往往是从某种不完善状况发展壮大起来的,甚至整个数学学科的发展,虽已有两千多年历史,其理论基础的坚实程度又如何?从本书的后文中就会清楚地看到,至今还没有从数学的第三次危机中真正解脱出来. 然而即便如此,也完全没有碍及现代数学的继续成长和迅速发展. 所以诸如公理化、形式化的意义与作用要强调,但那种公理化主义的观点要放弃,尤其是在新兴学科的可接受性问题上,坚持要有一个完美而坚实之理论基础的观点要扫除. 当然,这并不表示我们能容忍新理论可以矛盾百出,更不能认为我们无须去寻找每一门学科的坚实理论基础,相反这依然是我们所必须追求的一个十分重要的目标.

还应指出,公理化方法若不与实验方法相结合,则就有可能步入玄乎其玄,直至迷入歧途而不能自拔. 再者,公理化方法若不与认识论的科学方法相结合,也将不会更好地发现问题. 总之,应将公理化方法的意义和作用放在一个科学而适当的位置上.

通常认为,公理化方法的历史发展,可以划分为公理化方法的产生、公理化方法的完善和公理化方法的形式化这样三个阶段. 其中第一个阶段是指由 Aristotle 的完全三段论到 Euclid《几何原本》的问世,第二阶段是指非欧几何的诞生到 Hilbert 之《几何基础》的问世,第三阶段是指集合论悖论出现之后,Hilbert 在他的形式化研究方法,特别是在他的元数学(证明论)中把公理化方法所推向的一个新阶段. 对于公理化方法之第一、第二阶段的历史发展状况,在本书的前文中,实已论及. 对于公理化方法之形式化阶段的相关内容,在本书的后文中将作进一步讨论.

1.6 Лобачевский几何公理系统的相对相容性证明

我们在上节中已指出:通常对于一个公理系统,总希望它能协调、独立和完备.所谓协调性,也叫做相容性或无矛盾性.如果我们已在理论上证明了某个公理系统绝不会引出逻辑上互相排斥的命题,则就表示我们已给出了该公理系统的相容性证明.相容性证明有所谓相对相容性证明和直接相容性证明.其中相对相容性证明指的是:把一个公理系统的相容性证明建立在假定另一个公理系统的无矛盾性基础上.反之,如果不依靠任何别的公理系统的相容性假定,而是直接证明了一个公理系统的相容性,则就叫做该公理系统的直接相容性证明.

Лобачевский几何诞生后,由于罗氏公设$\tilde{V}$违背常识,极不自然和直观,从而大大激发了人们对于公理系统的相容性证明的兴趣.事实上,Лобачевский自己就曾致力于用解析方法去证明他的几何公理系统的协调性.但这不是一件轻而易举的事情,实践证明难以取得圆满成功.直到19世纪末期,大家才退一步考虑问题,既然人们对Euclid几何公理系统的相容性没有疑虑,那么能否借助于假定Euclid几何公理系统的无矛盾性去证明Лобачевский几何系统的协调性呢?后来,法国大数学家Poincaré借助于在Euclid几何系统中构造Лобачевский几何模型的办法,实现了这一目的.

所谓公理系统的模型,可以描述性地定义如下:假设Σ表示某个给定的公理系统,现选定一组客观对象,分别作为Σ中各个基本概念的具体解释,如果这些客观对象之间的关系,经过验证而知其一一满足Σ中诸公理的要求,此时就说给出了公理系统Σ的一个模型.

Poincaré是第一个在Euclid几何空间里构造Лобачевский几何模型的数学家.下文中,仅仅是为了我们的论述不至于过分繁琐,就限于平面几何的情形讨论之.从而我们所考虑的公理系统是Лобачевский几何公理表中除掉公理$I_4 \sim I_8$后构成的,记为Σ°.现在我们要在Euclid空间的平面上构造一个Лобачевский平面几何公理系统Σ°的模型.

任取Euclid空间一平面α,如图6.1所示,在α上作一水平直线u,而u将α分为上、下两个半平面,我们把全开的上半平面$\mathfrak{S}$(即上半平面而去掉u上的点)称为罗氏平面,又把$\mathfrak{S}$上的点称为罗氏点,再把垂直于u而位于$\mathfrak{S}$上的半直线,以及圆心在u上而圆周与u垂直且位于$\mathfrak{S}$上的半圆周,统称为罗氏直线.如此,我们所选取的一组客观对象,便是上述欧

氏平面上的那些被命名为罗氏平面、罗氏点和罗氏直线的一类对象．它们分别是全开的欧氏半平面 $\mathfrak{S}$、$\mathfrak{S}$ 上的点、位于 $\mathfrak{S}$ 上而又垂直于 u 的半直线或圆心在 u 上的半圆周．我们要验证所选取的这些客观对象，确能满足公理系统 Σ° 中诸公理的要求．

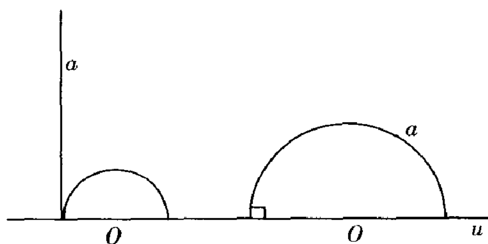


图 6.1

第一组　结合公理 $\mathrm{I}_1^{\circ}\sim\mathrm{I}_3^{\circ}$：

设 A 和 a 分别表示任给的一个罗氏点和一条罗氏直线，如果在欧氏意义下，A 位于用以表示罗氏直线的那个欧氏意义下的半圆周或半直线上，则说罗氏点 A 在罗氏意义下位于罗氏直线 a 上，或说在罗氏意义下 a 通过 A 等等．

因在欧氏意义下，过 $\mathfrak{S}$ 上任何两点 A 和 B，能且只能作一个半圆周，使其圆心在 u 上，并且圆周与 u 成直角．如果线段 AB 之中垂线与 u 不相交，则表明过点 A 与 B 之直线与 u 正交，并且有且仅有一直线连结点 A 和 B．此外，在 $\mathfrak{S}$ 上用以表示罗氏直线之半圆周或半直线之上及其外，在欧氏意义下存在着无穷多个点．从而就验证了下述公理 $\mathrm{I}_1^{\circ}\sim\mathrm{I}_3^{\circ}$是成立的．

I_1°　在罗氏平面上，任给两个不同的罗氏点 A 和 B，至少有一条罗氏直线 a 连结点 A 和 B．

I_2°　在罗氏平面上，任给两个不同的罗氏点 A 和 B，至多只有一条罗氏直线 a 连结点 A 和 B．

I_3°　任一罗氏直线上，至少存在着两个点，又至少存在着不在同一条罗氏直线上的三个点．

第二组　顺序公理 $\mathrm{II}_1^{\circ}\sim\mathrm{II}_4^{\circ}$：

现先按下述意义确定罗氏直线上的点的顺序，如图 6.2 所示，当罗氏直线 a′ 是圆心 O 在 u 上，并位于 $\mathfrak{S}$ 上的半圆周时，我们在 $\mathfrak{S}$ 上，并在欧氏意义下作一直线 u'，并且平行于 u．设点 M 在 a' 上，则称射线 OM 与 a' 的交点 M' 为 M 的对应点，反之设 M' 为 u' 上任一点，则称射线 OM' 与 a' 的交点 M 为 M' 的对应点，这种对应关系在欧氏意义下是一对一的．

我们规定罗氏直线 a' 上的点的顺序，由它们在 u' 上的对应点在 u' 上于欧氏意义下的顺序确定．如此，在 a' 与 u' 之有序点集之间的一一对应是保序的．此外，当罗氏直线 a 为 $\mathfrak{S}$ 上垂直于 u 的半直线时，则规定该半直线上的点在欧氏意义下的顺序，就是该罗氏直线的点在罗氏意义下的顺序．另一方面，设罗氏点 A、B 位于罗氏直线上，则称点组 A 和 B 为罗氏线段，记为 $\widehat{AB}$．并称该罗氏直线上位于 A、B 中间的点为罗氏线段 $\widehat{AB}$ 内部的点，A、B 为 $\widehat{AB}$ 的端点，而该罗氏直线上其余的点为 $\widehat{AB}$ 外部的点．如此，不难验证下述公理 $\mathrm{II}_1^\circ \sim \mathrm{II}_4^\circ$ 是成立的．

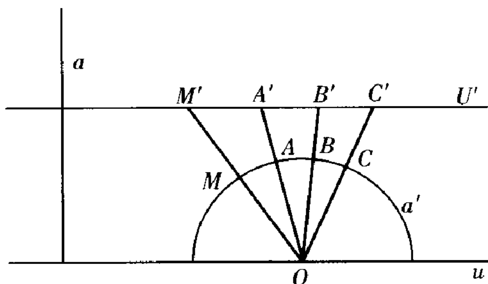


图 6.2

II_1°　设 A、B、C 是罗氏直线上三个不同的点，并且 B 在 A 与 C 之间，则 B 也在 C 与 A 之间．

II_2°　任给两个罗氏点 A 和 C，则连接 A 和 C 的罗氏直线上，至少还存在着一点 B，使得 C 在 A 和 B 之间．

II_3°　罗氏直线上任意三个点，至多只有其中的一个点，在其余两点之间．

II_4°　$\mathfrak{S}$ 上任给三个不在同一条罗氏直线上的点 A，B，C，又 a 为 $\mathfrak{S}$ 上的一条罗氏直线，则当 a 通过罗氏线段 $\widehat{AB}$ 内部的点时，则 a 或者还通过 $\widehat{AC}$ 内部的点，或者还通过 $\widehat{BC}$ 内部的点．

事实上，按照上述罗氏直线上之点的顺序规定，当罗氏直线为所说之半圆周 a' 时，则因 Σ° 之公理 $\mathrm{II}_1 \sim \mathrm{II}_3$ 对 u' 的有序点集是成立的，从而公理 $\mathrm{II}_1^\circ \sim \mathrm{II}_3^\circ$ 对 a' 的有序点集也成立．当罗氏直线为所说的半直线 a 时，则因 Σ° 的公理 $\mathrm{II}_1 \sim \mathrm{II}_3$ 对半直线上的有序点集是成立的，所以公理 $\mathrm{II}_1^\circ \sim \mathrm{II}_3^\circ$ 对于 a 的有序点集也成立．至于公理 II_4° 的验证，则因绝对几何系统中有下述定理．

定理　设 ABC 是由半圆周弧所组成的曲边三角形，而 a 是位于由 A，B，C 三点所决定之平面上，但不通过点 A，B，C 的任一半圆周，当 a 通

过弧$\overset{\frown}{AC}$内部的一点时，则 a 或者还通过弧$\overset{\frown}{AB}$内部的点，或者还通过弧$\overset{\frown}{BC}$内部的点.

在该定理中，还允许组成曲边三角形的某个半圆周弧的半径无限长. 从而由本定理便可验证公理 II_4°是成立的.

第三组　　合同公理 III_1°～ III_5°：

对于合同公理 III_1°～ III°的验证比较复杂，在这里，我们必须引述解析函数论中的反形（亦称反演）变换及其相关的几条性质，然后借助于反形概念，给出罗氏线段与罗氏角的合同概念，然后列出 III_1°～ III_5°，并逐一验证之.

任给以点 O 为圆心，ρ 为半径的圆 k，如果两点 M 与 M' 满足条件：(1) 点 M 和 M' 位于过圆 k 之圆心 O 的直线上；(2) 圆 k 之圆心 O 不在点 M 与 M' 之间；(3) $r \cdot r' = \rho^2$（此处 ρ 为圆 k 之半径，而 $r = OM$，$r' = OM'$），则称圆 k 为基圆. 那么当点 M 预先取定时，则称点 M' 为 M 的反形像，反之亦然. 基圆 k 的圆心 O 叫做反形中心，正数 ρ^2 叫做反形幂，反形变换决定于反形中心和反形幂. 又若点 M' 与 M 对称于直线 u，则说点 M' 是点 M 关于直线 u 的反形像. 如图 6.3 所示，设基圆 k 的中心为 O，半径为 ρ，圆内一点 M 是预先取定的，过点 M 引直线 OM 的垂线，该垂线交圆周于 D、E 两点，过点 D 作圆周的切线交直线 OM 于一点 M'，则易见 $OD^2 = OM \cdot OM'$，即 $r \cdot r' = \rho^2$. 故点 M' 为点 M 关于圆 k 的反形像. 反之，如果先取圆外一点 M'，则过点 M' 作圆 k 的二切线，分别切圆周于 D、E 两点，则易证直线 DE 与 OM' 之交点 M 是点 M' 关于基圆 k 的反形像. 至此我们已给出了反形变换的一对对应点的求作方法，而作法本身也是反形变换之对应点的存在性证明.

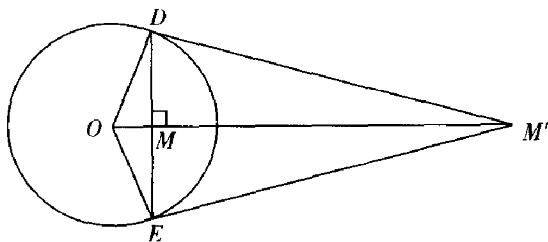


图 6.3

现在我们列出下述 6 条关于反形变换的性质，它们对下文的讨论都是必需的. 有关这些性质的证明无法在此详加讨论，只能留给读者去查阅有关解析函数论和保角变换理论的专著.

性质 1 位于基圆 k 内部的点的反形像在基圆 k 的外部，而位于基圆 k 外部的点的反形像在基圆 k 的内部，位于圆周上的每个点与它关于该圆的反形像重合.

性质 2 如果点 M' 是点 M 的反形像，则点 M 也是点 M' 的反形像，即反形变换与它的逆变换重合.

性质 3 反形变换具有保圆的性质，亦即一个圆周上的所有点的反形像的几何轨迹仍是一个圆周.

设点 M' 是点 M 关于基圆 k 的反形像，而点 M'' 又是点 M' 关于基圆 k' 的反形像，则称点 M'' 是点 M 关于 k 和 k' 的这两个反形变换的乘积变换的反形像. 以此类推，可以定义三个、四个直到 n 个反形变换的乘积变换.

性质 4 如果作为偶数个反形变换的乘积变换 φ 使得平面上有三个点保留着自己的位置不动时，则平面上每个点在此变换 φ 下都保留着自己的位置不动，亦即 φ 是一个恒等变换.

性质 5 如果作为奇数个反形变换的乘积变换 ψ 使得平面上有三个点保留着自己的位置不动时，则此变换 ψ 必为关于由这三点所决定的圆 S 的反形变换，亦即 ψ 是以这三点所决定之圆为基圆的反形变换.

性质 6 反形变换具有保角的性质，亦即相交的两圆周在任意反形变换下，由该两圆周在交点组成的曲线角，必等于由变换后所得到的相交圆周在对应公共点所组成之曲线角.

最后还应指出，反形中心 O 在欧氏平面上没有反形像，因为当 $r = OM \to 0$ 时，

$$r' = OM' = \frac{\rho^2}{r} \to \infty.$$

但无穷远点不在平面上. 因而预先取定的点 M 不与反形中心 O 重合. 另一方面，反形中心 O 也不可能是任何点的反形像.

设罗氏平面 $\mathfrak{S}$ 上的一条罗氏直线 a 的半径无限长，如图 6.4 所示，a 交 u 于点 X，O 为 a 上任一罗氏点，则欧氏意义下的线段 OX 为罗氏意义下的、以 O 为原点的一条罗氏半直线（注意点 X 不在罗氏平面 $\mathfrak{S}$ 上，因而点 X 在罗氏意义下，应视为无穷远点）. 类似地，设 a' 为一条半径有限长的罗氏直线，点 O' 在 a' 上，又 X' 为 a' 与 u 的一个交点，则在欧氏意义下的半圆弧 $\overset{\frown}{O'X'}$ 便是以 O' 为原点的罗氏半直线之一. 在同样的意义下，点 X' 被视为罗氏意义下的无穷远点，因而不在该半直线上. 此外，很自然地将罗氏角定义为相交于一点的两条罗氏半直线的组合，如图 6.4 之右部所示.

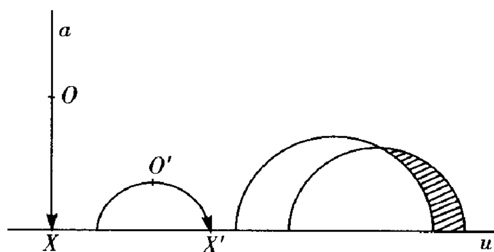


图 6.4

还应声明，我们在构造 Σ° 之模型的过程中，只使用那种基圆圆周与 u 正交，并且基圆圆心(即反形中心)在 u 上的那种反形变换. 如此，凡位于平面𝔖上的点，在此规定范围内的反形变换下，总是变换到𝔖上，而不会变换到𝔖之外去.

下面我们来给出罗氏线段和罗氏角的合同概念. 设 $\widehat{AB}$ 和 $\widehat{A'B'}$ 是两个罗氏线段，如果存在着一串符合上述限定范围内的反形变换，由它们的乘积所构成的变换 φ，在欧氏意义下将 $\widehat{AB}$ 变换到 $\widehat{A'B'}$，则称罗氏线段 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{A'B'}$ 是合同的.

设 $\angle(h,k)$ 与 $\angle(h',k')$ 是两个罗氏角，如果存在着一串符合以上限定范围内的反形变换之乘积变换 ψ，能把 $\angle(h,k)$ 的两条边，在欧氏圆弧段意义下变换到 $\angle(h',k')$ 的两边，则称罗氏角 $\angle(h,k)$ 与 $\angle(h',k')$ 是合同的.

如此，由性质 2 知，反形变换之逆变换仍为反形变换，从而当有 $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ 时，必有 $\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$. 又由性质 6 知，在罗氏意义下合同的两个角在欧氏意义下相等，但在罗氏意义下合同的两个线段，在欧氏意义下并不是合同的弧段. 对此可由性质 3 看出，其中只保圆而不保圆弧段相等.

容易证明，一条半径有限长的罗氏直线的反形像还是一条半径有限长的罗氏直线.

现给出罗氏线段之中垂线及罗氏角之角平分线的作法：

(1) 罗氏线段在罗氏意义下之中垂线的作法：如图 6.5 所示，设 $\widehat{AB}$ 是位于罗氏直线 a 上的一个罗氏线段. 先于欧氏意义下引 A，B 两点之直线交 u 于点 O'，再过点 O' 作圆弧 $\widehat{AB}$ 之切线切 $\widehat{AB}$ 于点 D，再以 O' 为中心，以 $O'D$ 之长为半径作一圆周 k，k 位于𝔖上之半圆周，a' 为一罗氏直线. 但由欧氏几何定理可知，$O'A \cdot O'B = O'D^2$，因而关于基圆 k 的反形变换 φ 将点 A 变换到点 B，其逆变换又将点 B 变换到点 A. 而 D 在基圆 k 的圆周上，由性质 1 知点 D 在 φ 之下不动. 此外，作为 a 的割线 $O'AB$ 绕

点 O' 转动到它的极限位置 $O'D$ 的过程中，弦的两端点的几何轨迹是弧段$\widehat{AD}$ 和$\widehat{DB}$，故反形变换 φ 正好把$\widehat{AD}$ 变换到$\widehat{DB}$. 其逆变换又把$\widehat{DB}$ 变换到$\widehat{AD}$. 从而作为罗氏线段之$\widehat{AD}$ 与$\widehat{DB}$ 在罗氏意义下互相合同，故点 D 为罗氏线段$\widehat{AB}$ 在罗氏意义的中点. 又 $O'D \perp OD$，故 a' 与$\widehat{AB}$ 正交，从而在罗氏意义下，a' 是$\widehat{AB}$ 的中垂线，点 A 与 B 对称于罗氏直线 a'.

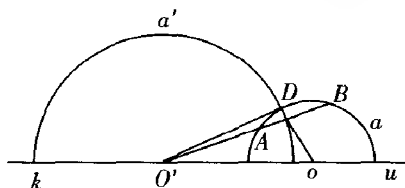


图 6.5

(2) 罗氏角在罗氏意义的角平分线的作法：如图 6.6 所示，设 a 和 a' 为两条相交于点 A 的罗氏直线，以 A 为原点到 X 方向的罗氏半直线记为 h，而以 A 为原点到 X' 这一方向的罗氏半直线记为 h'，如此，h 与 h' 组成以点 A 为角顶之罗氏角 $\angle(h,h')$. 下文给出 $\angle(h,h')$ 在罗氏意义下之角平分线的作法.

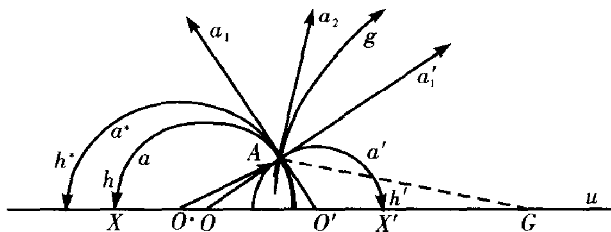


图 6.6

先在欧氏意义下过点 A 分别引罗氏直线 a 和 a' 的切线 a_1 和 a_1'，故 a 的半径 OA 与 a_1 正交于点 A，a' 的半径 O'A 与 a_1' 正交于 A. a_1 与 a_1' 在箭头所示方向组成 $\angle(a_1,a_1')$，在欧氏意义下，作 $\angle(a_1,a_1')$ 之角平分线 a_2，过点 A 引 a_2 之垂线交 u 于点 G. 再以 G 为中心，以 GA 为半径作一罗氏直线 g，显然 a_2 切 g 于点 A，可证此 g 便是罗氏角 $\angle(h,h')$ 在罗氏意义下的角平分线. 事实上，考虑以罗氏直线 g 所在圆周 S_0 为基圆的反形变换 φ，由性质 1 知 g 上的点在 φ 之下留在原来的位置不动，设 a' 在 φ 之下的反形像为罗氏直线 a^*，此时罗氏半直线 h' 在 φ 之下的反形像为 a^* 上的半直线 h^*，于是 $\angle(h',g)$ 与 $\angle(g,h^*)$ 这两个罗氏角在罗氏意义下合同. 由性质 6 知曲线角 $\angle(h',g)$ 与 $\angle(g,h^*)$ 在欧氏意义下相等，故 a_1 也切 a^* 于点 A，罗氏直线 a^* 的半径 O^*A 也与 a_1 正交于点 A，根据欧氏

几何的相关定理可知，a 和 a^* 之半径 OA 与 O^*A 重合，故 O 与 O^* 重合，于是 a 与 a^* 重合. 这表明 h' 在 φ 之下变换到 h，而 h 又在 φ 之逆变换下变换到 h'. 故罗氏角 $\angle(h',g)$ 与 $\angle(g,h^*)$ 在罗氏意义下合同，故罗氏直线 g 为罗氏角 $\angle(h,h')$ 在罗氏意义下的角平分线.

Ⅲ$_1^\circ$　设 A，B 为罗氏直线 a 上的两个点，又 A' 是罗氏直线 a'（也允许 a 与 a' 为同一条罗氏直线）上的点，则在罗氏直线 a' 上的点 A' 的某一侧，有且仅有一点 B'，使得罗氏线段 $\widehat{AB}$ 与 $\widehat{A'B'}$ 在罗氏意义下合同，即 $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$. 并对每个罗氏线段 $\widehat{AB}$ 都有 $\widehat{AB}=\widehat{BA}$.

现验证 Ⅲ$_1^\circ$ 成立. 如图 6.7 所示，设 a 和 a' 为 $\mathfrak{S}$ 上之二罗氏直线，在 a 上取一罗氏线段 $\widehat{AB}$，又在 a' 上取一点 A'，我们在 a' 上，由点 A' 所决定的两条罗氏半直线中选定一条 $\widehat{A'X'}$. 又 $\mathfrak{S}$ 上两个罗氏点 A 和 A' 决定一条罗氏直线 b. 现作罗氏线段 $\widehat{AA'}$ 在罗氏意义下的中垂线 l，l 所在圆的圆心记为 L，再考虑以 l 所在圆为基圆的反形变换 ψ，再作出 a 在 ψ 之下的反形像 a''. 前已指出，a'' 仍为一罗氏直线. 又欧氏直线 LB 交 a'' 于点 B'，于是罗氏线段 $\widehat{A'B'}$ 便是罗氏线段 $\widehat{AB}$ 在 ψ 之下的反形像，即 $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$. 如图 6.7 所示，考虑以 A' 为原点的两条罗氏半直线 h 和 k，它们组成以点 A' 为角顶的罗氏角 $\angle(h,k)$，现作 $\angle(h,k)$ 在罗氏意义下的角平分线 n. 再考虑以 n 所在之圆周为基圆的反形变换 φ，如前已证知，此时罗氏半直线 h 和 k 在 φ 之下互为反形像，设罗氏点 B' 在 φ 之下的反形像为 h 上的罗氏点 B^*，于是 $\widehat{A'B'}=\widehat{A'B^*}$. 于是罗氏线段 $\widehat{AB}$ 就在 ψ 和 φ 的乘积变换下，变换到罗氏线段 $\widehat{A'B^*}$.

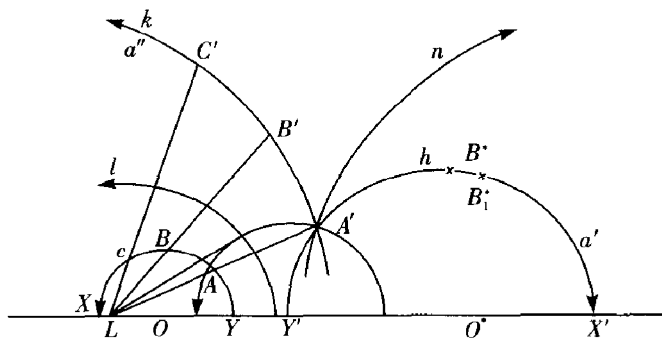


图 6.7

然而公理 Ⅲ$_1^\circ$ 还要求在罗氏半直线 h 上，唯一地存在着点 B^* 使有 $\widehat{AB}=\widehat{A'B^*}$，为此，我们反设 h 上另有一点 B_1^*，也使有 $\widehat{AB}=\widehat{A'B_1^*}$，这表明另有一串反形变换的乘积变换 f，使得 $\widehat{AB}$ 在 f 之下变换到 $\widehat{A'B_1^*}$. 再将上

述 ψ 和 φ 的乘积变换记为 q. 如图 6.7 所示，点 X, Y, X', Y' 分别表示罗氏线段 $\overparen{AB}$ 和 $\overparen{A'B^*}$ 所在罗氏直线从不同方向延长后与 u 在欧氏意义下的交点，这些交点不在 $\mathfrak{S}$ 上，显然，无论在 f 之下或在 q 之下，X 总是变换到 X'，Y 总是变换到 Y'. 今以 q^{-1} 表示 q 的逆变换，又以 g 表示 q^{-1} 与 f 的乘积变换. 于是在 g 之下，X' 先由 q^{-1} 变换到 X，再由 f 变回到 X'. 同理，Y' 与 A' 在 g 之下也保留原来的位置不动. 如此，在变换 g 之下，就使 3 个点 X', Y', A' 保留原来的位置不动. 于是由性质 4 和 5 可知，g 或者是恒等变换，或者是关于罗氏直线 a' 所在圆周为基圆之反形变换. 然而无论在哪种情况，罗氏直线 a' 上的每一点，在 g 之下都保留原来的位置. 因而 a' 上的 B^* 也不会例外，亦即在 g 之下，B^* 不能变换到异于 B^* 的点 B_1^* 去，故 B^* 点与 B_1^* 点必重合. 点 B^* 之唯一性至此验证完毕.

又 III_1° 还要确立 $\overparen{AB} \equiv \overparen{BA}$，对此早在论及罗氏线段之中垂线时验证过了.

III_2° 如果罗氏线段 $\overparen{A'B'}$ 和 $\overparen{A''B''}$ 均合同于一个罗氏线段 $\overparen{AB}$，则有 $\overparen{A'B'} \equiv \overparen{A''B''}$.

事实上，若有 $\overparen{A'B'} \equiv \overparen{AB}$，$\overparen{A''B''} \equiv \overparen{AB}$，则表明存在着一串反形变换的乘积变换 f，使得 $\overparen{A'B'}$ 变换到 $\overparen{AB}$，又有另一串反形变换的乘积变换 g，使得 $\overparen{A''B''}$ 变换到 $\overparen{AB}$. 设 g^{-1} 为 g 的逆变换，那么 $\overparen{AB}$ 在 g^{-1} 之下就变换到 $\overparen{A''B''}$. 现将 f 和 g^{-1} 之乘积变换记为 q，那么 $\overparen{A'B'}$ 在 q 之下，先由 f 变换到 $\overparen{AB}$，再由 g^{-1} 变换到 $\overparen{A''B''}$，这表明存在一串反形变换的乘积变换，能使有 $\overparen{A'B'} \equiv \overparen{A''B''}$.

III_3° 如果罗氏线段 $\overparen{AB}$ 和 $\overparen{BC}$ 是罗氏直线 a 上的两个线段，并且没有公共的内部的点，又 $\overparen{A'B'}$ 和 $\overparen{B'C'}$ 为同一条 a 或另一条罗氏直线 a' 上的两个罗氏线段，它们也没有公共的内部的点，如果有 $\overparen{AB} \equiv \overparen{A'B'}$ 和 $\overparen{BC} \equiv \overparen{B'C'}$，则必有 $\overparen{AC} \equiv \overparen{A'C'}$.

事实上，所设 $\overparen{AB} \equiv \overparen{A'B'}$ 表明存在一串反形变换的乘积变换 f，使得 $\overparen{AB}$ 变换到 $\overparen{A'B'}$. 此时罗氏线段 $\overparen{AB}$ 所在罗氏直线上的点 C，在 f 之下也被变换到罗氏线段 $\overparen{A'B'}$ 所在罗氏直线上的一点 C^*，并且不难确定 C^* 和 C' 在该罗氏直线上落在点 B' 的同一侧，即罗氏线段 $\overparen{B'C'}$ 和 $\overparen{B'C^*}$ 在点 B' 的同一侧，又由作法可知 $\overparen{B'C^*} \equiv \overparen{BC}$，又已知 $\overparen{B'C'} \equiv \overparen{BC}$，由 III_2° 知有 $\overparen{B'C'} \equiv \overparen{B'C^*}$，由 III_1° 知点 C' 与点 C^* 重合，这表明罗氏线段 $\overparen{AC}$ 在 f 之下被变换到罗氏线段 $\overparen{A'C'}$，即 $\overparen{AC} \equiv \overparen{A'C'}$.

III_4° 在罗氏平面 $\mathfrak{S}$ 上，任给一罗氏角 $\angle(h,k)$ 和一罗氏直线 a'，并且预先指定好 a' 的某一侧，令 h' 表示由 a' 上一点 O' 沿着 a' 之某方向出

发的一条罗氏半直线，那么在 $\mathfrak{S}$ 上由 O' 出发，有且仅有一条罗氏半直线 k'，使得罗氏角 $\angle(h,k)$ 合同于罗氏角 $\angle(h',k')$. 记为 $\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$. 并且 $\angle(h',k')$ 之内部的点，都在 a' 的预先指定的一侧. 又对于每个罗氏角 $\angle(h,k)$ 总有 $\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$ 和 $\angle(h,k)\equiv\angle(k,h)$.

事实上，如图 6.8 所示，设已知罗氏角 $\angle(h,k)$ 之角顶为点 O，而 h' 表示以罗氏点 O' 为原点的罗氏半直线. 如此，参见 Ⅲ$^\circ_1$ 之验证手续，首先借助于罗氏线段 $\widehat{OO'}$ 之中垂线，将 $\angle(h,k)$ 的两边分别变换到 h^* 和 k^*，于是得到以点 O' 为角顶的罗氏角 $\angle(h^*,k^*)$，然后借助于罗氏角 $\angle(h',h^*)$ 之角平分线，先把 h^* 变换到 h'，再根据预先所指定之 h' 的一侧的需要，或者把 k^* 借助于 $\angle(h',h^*)$ 的角平分线一次变换到 k'，或者此时不在所指定之一侧的话，再将 k' 借助于 h' 变换到 h' 的另一侧，如此即可完成 $\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$. 以上诸步骤之细节或详细论述，读者可参见 Ⅲ$^\circ_1$ 之验证手续一一补全.

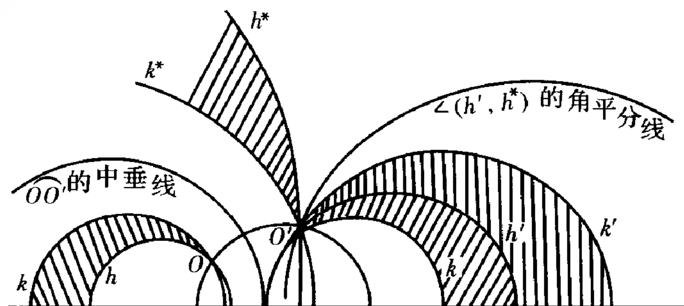


图 6.8

至于 Ⅲ$^\circ_4$ 还要求验证在 h' 指定一侧，所作之罗氏角 $\angle(h',k')$ 为唯一确定之事，我们可反设 $\angle(h,k)$ 既经过一串反形变换之乘积变换 f 变换到 $\angle(h',k'_1)$，又经另一串反形变换之乘积变换 g 而使 $\angle(h,k)$ 变换到 $\angle(h',k'_2)$. 现将 f 的逆变换记为 f^{-1}，又将 f^{-1} 与 g 之乘积变换记为 q. 如此，$\angle(h',k'_1)$ 在 q 之下，先经 f^{-1} 变换到 $\angle(h,k)$，再经 g 变换到 $\angle(h',k'_2)$. 参见 Ⅲ$^\circ_1$ 中对点 B^* 之唯一性的验证手续，同样根据性质 4 和 5 可证变换 q，要么是个恒等变换，要么是关于罗氏半直线 h' 所在圆周 S 为基圆的反形变换. 如果是前者，则 $\angle(h',k'_1)$ 与 $\angle(h',k'_2)$ 重合，如果是后者，则 $\angle(h',k'_1)$ 与 $\angle(h',k'_2)$ 在关于 S 的反形变换下互为反形像，因此罗氏半直线 k' 要么是 k'_1，要么是 k'_2，不论哪种情况，都唯一确定.

又 Ⅲ$^\circ_4$ 还要求 $\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$ 和 $\angle(h,k)\equiv\angle(k,h)$，因为恒等变换可视为一个反形变换和它的逆变换的乘积，故 $\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$.

而对于 $\angle(h,k) = \angle(k,h)$，只要作罗氏角 $\angle(h,k)$ 在罗氏意义下的角平分线，即可验证其为真.

Ⅲ$_5^\circ$　设 A,B,C 为 $\mathfrak{S}$ 上不在同一条罗氏直线上的三个罗氏点. 又 A',B',C' 是 $\mathfrak{S}$ 上不在同一条罗氏直线上的另外三个罗氏点. 如果罗氏线段有 $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$，$\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$，又罗氏角 $\angle(BAC) \equiv \angle(B'A'C')$，则必有罗氏角 $\angle(ABC) \equiv \angle(A'B'C')$ 与 $\angle(ACB) \equiv \angle(A'C'B')$. 其中罗氏角 $\angle(BAC)$ 表示以 A 为角顶，以由 A 到 B 的方向的罗氏半直线和由 A 到 C 之方向的罗氏半直线为角边所组成之罗氏角，余类推.

事实上，如图 6.9 所示，设由 A 到 B 与 C 方向的罗氏半直线分别为 h 和 k，由 A' 到 B' 与 C' 方向之罗氏半直线分别为 h' 和 k'，因为已知 $\angle(BAC) \equiv \angle(B'A'C')$，故知有一串反形变换的乘积变换 φ，使得 h 变换到 h'，以及 k 变换到 k'. 又因已知 $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$，$\widehat{AC} = \widehat{A'C'}$. 故在 φ 之下，h 上的点 B 变换到 B'，而 k 上的点 C 变换到 C'. 由公理 Ⅰ$_1^\circ$ 和 Ⅰ$_2^\circ$ 知，罗氏点 B 和 C 决定一条罗氏直线 l，又罗氏点 B' 和 C' 也决定一条罗氏直线 l'. 今设 l 在 φ 之下被变换到罗氏直线 l''，因前已指出，罗氏点 B,C 在 φ 之下分别变换到罗氏点 B' 与 C'，故 l'' 必通过 B' 与 C'，故 l' 与 l'' 为同一条罗氏直线. 这表明罗氏角 $\angle(ABC)$ 的两条边，在 φ 之下分别变换到罗氏角 $\angle(A'B'C')$ 的两条边，故 $\angle(ABC) \equiv \angle(A'B'C')$. 同理可见 $\angle(ACB) \equiv \angle(A'C'B')$.



图 6.9

第四组　连续公理 Ⅳ$_1^\circ$ ～ Ⅳ$_2^\circ$：

我们在 1.3 节之末曾指出：在 Hilbert 所给的 Euclid 几何公理系统中，第四组连续公理 Ⅳ$_1$、Ⅳ$_2$ 有一个重要的等价命题，即所谓关于直线上所有点的 Dedekind 割切原理. 因而在这里只要验证下述公理 Ⅳ$_D^\circ$ 能以成立即可.

Ⅳ$_D^\circ$　设 a 为 $\mathfrak{S}$ 上任一罗氏直线，则 Dedekind 割切原理对于 a 的有序点集而言是成立的.

事实上，我们在验证顺序公理 Ⅱ$_1^\circ$ ～ Ⅱ$_4^\circ$ 时，已经确定了任一罗氏直线 a 的有序点集与欧氏意义下平行于 u 之直线 u' 的有序点集之间，存在着保序的一一对应关系. 因而由 Dedekind 割切原理对 u' 之有序点集的真实性，直接推知 Dedekind 割切原理对 u' 之有序点集的真实性，直接推

知 Dedekind 割切原理对于罗氏直线 a 的有序点集是成立的.

第五组　平行公理 $\tilde{V}^{\circ}$：

$\tilde{V}^{\circ}$　过 $\mathfrak{S}$ 上任一已知罗氏直线外的任一罗氏点，至少能引两条罗氏直线与该已知罗氏直线在罗氏平面 $\mathfrak{S}$ 上没有公共点.

事实上，如图 6.10 所示，设 a 表示 $\mathfrak{S}$ 上任一半径有限长的罗氏直线，其圆心为 u 上的点 O，并且与 u 正交于点 X 和 Y 两点，A 为 $\mathfrak{S}$ 上不在 a 上的一个罗氏点，现于欧氏意义下联结 A 和 X，并作线段 AX 之中垂线交 u 于 O'，再以 O' 为中心，以 $O'A=O'X$ 为半径作圆 k'，显然 k' 与 a 所在圆周 k 相切于点 X，易见在欧氏意义下，点 X 是 k 和 k' 之唯一的公共点. 又 k' 在 $\mathfrak{S}$ 上的部分 a' 为 $\mathfrak{S}$ 上的一条过罗氏点 A 的一条罗氏直线，我们断言罗氏直线 a 和 a' 在罗氏平面 $\mathfrak{S}$ 上没有公共点，只要注意到点 X 在 u 上而不为 $\mathfrak{S}$ 上的罗氏点. 完全类似地，过罗氏点 A 且于 u 正交于 Y 的罗氏直线 a'' 与 a 在 $\mathfrak{S}$ 上也没有公共点. 因而过点 A 至少存在所作之两条罗氏直线 a' 与 a'' 在 $\mathfrak{S}$ 上与 a 不相交.

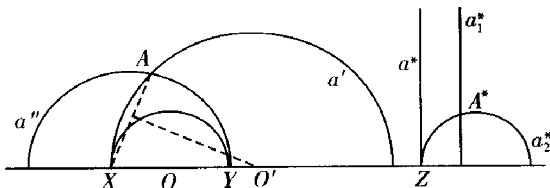


图 6.10

此外，当罗氏直线 a^* 的半径无限长且与 u 正交于点 Z 时，设 A^* 是 $\mathfrak{S}$ 上且在 a^* 外的一点，则如图 6.10 所示，在 $\mathfrak{S}$ 上也至少存在着两条罗氏直线，它们过罗氏点 A^* 而在 $\mathfrak{S}$ 上与 a^* 没有公共点，其一是过 A^* 且半径无限长的罗氏直线 a_1^*，另一条是过 A^* 而与 u 正交于罗氏点 Z 的罗氏直线 a_2^*，因而不论哪种情形，我们都验证了 $\tilde{V}^{\circ}$ 是成立的.

至此我们已经实现了在欧氏系统中构造罗氏平面几何系统 Σ° 之模型的目标. 这一模型的构造成功，表明了这样一个事实，即只要假定 Euclid 几何公理系统是无矛盾的，则 Лобачевский 几何公理系统也一定是相容的. 因为若设 Лобачевский 几何系统中出现正反两个矛盾命题的话，则只要按照构造模型时所取几何元素的对应名称翻译一下，就将出现 Euclid 几何系统之全开半平面 $\mathfrak{S}$ 上的点和正交于 u 的半圆周等之间的两个矛盾命题，从而 Euclid 几何公理系统，便成为不协调系统，从而矛盾于原设. 至此我们已完成了 Лобачевский 几何公理系统相对于 Euclid 几何公理系统的相对相容性证明.

然而新问题又来了，人们不禁要问，Euclid 几何公理系统的相容性又如何？因为过去之所以认为 Euclid 几何公理系统比较可靠，仅仅是依靠常识和直观感觉. 但由于 Descartes 创立了解析几何，直接启发人们在实数系统中去构造 Euclid 几何公理系统模型，结果这样的模型也构造成功了. 这表明 Лобачевский 几何系统的相容性又进一步归结到了实数系统的相容性. 至于如何在实数系统中构造 Euclid 几何系统的模型一事，我们就不再详加讨论了，有兴趣的读者可阅读文献[5]4.3 节的内容，在那里有详细的论述. 然而问题至此尚未了结，人们会继续问及实数系统的相容性又如何？后来 Dedekind 又将实数系统的无矛盾性归结到自然数系统的相容性，最后 Frege 又将自然数系统的协调性归结到集合论系统的相容性. 然而集合论的相容性又如何呢？这也正好是本书后文要详加讨论的主要议题之一. 在此暂且搁置一下.

1.7 几何公理系统的独立性和完备性

正如上节所论，只要假定自然数系统是相容的，那么 Euclid 几何系统与 Лобачевский 几何系统都是相容的. 此外，我们已知上述两个几何公理系统有一个公共部分，被称为绝对几何系统. 进而 Euclid 几何系统便是绝对几何系统外加第五公设构成，Лобачевский 几何系统却是绝对几何系统外加罗氏公设而构成. 并且 1.1 节中所述第五公设问题，无非就是问第五公设能否在绝对几何公理系统中作为定理而证明之. 我们说只要 Лобачевский 几何公理系统是无矛盾的，就能确保第五公设不能从绝对几何系统中推导出来，亦即第五公设在 Euclid 几何公理系统中是独立于其他公设和公理的. 否则，若设在绝对几何系统中能把第五公设推导出来的话，则此时第五公设及其否命题（即罗氏公设）就在系统内同时成立，以致 Лобачевский 几何系统为矛盾系统了. 从而矛盾于上面所说 Лобачевский 几何系统为相容系统这一事实了.

普遍地说，若要证明某公理系统 Σ 中某条公理 σ 对于系统内其余公理在逻辑上的独立性，只要由 Σ 中去掉 σ，同时又引进 σ 的否命题 $\neg\sigma$，使之构成另一公理系统 Σ'，即

$$\Sigma' = (\Sigma - \sigma) + \neg\sigma.$$

然后证明 Σ' 为协调即可.

现讨论一下 Euclid 几何系统与 Лобачевский 几何系统的完备性要

求. 为此，让我们给出所谓公理系统之不同模型之间的同构概念. 假设 Σ 为一已知的公理系统，而 Σ 在两个不同的对象集合 S 和 S' 上，分别构造了两个模型 Σ_S 和 $\Sigma_{S'}$，如果 Σ_S 与 $\Sigma_{S'}$ 之间可以建立这样的一一对应，使得对应元素之间有同样的相互关系. 就说两个模型 Σ_S 和 $\Sigma_{S'}$ 是同构的.

若以几何模型作解释时，所谓同样的相互关系，就是指 Σ_S 的点 A 和直线 a，分别对应于 $\Sigma_{S'}$ 中之点 A' 和直线 a' 时，如果在 Σ_S 中点 A 落在直线 a 上，则在 $\Sigma_{S'}$ 中也有点 A' 落在直线 a' 上，如此等等.

现若将 Euclid 几何公理系统中的结合公理 I_1，I_2，I_3 作为一个独立的公理系统，并记为 Σ. 再将某个三角形的三个顶点叫做 Σ 的点，三条边叫做 Σ 的直线. 如此，我们就有了一个共有六个对象作为元素的集合，记为 σ. 这个三角形就是 Σ 在 σ 上的一个模型，记为 M. 为什么?因为容易验证 Σ 的三条公理的要求全部得到满足. 例如，对公理 I_1 而言，要求对任何两点都有一直线连结它们，这里对三角形的任何两个顶点，都有一条边联结它们. 故 I_1 在 M 中是满足的. 其余可类似地加以验证.

让我们在 Σ 中增加 5 条新的公理 I_4～ I_8，即把 Euclid 几何系统中的结合公理 I_1～ I_8 加到 Σ 中去，使之扩大为包含 I_1～ I_8 这样 8 条公理的一个公理系统，记为 Σ_1. 现将一个四面体的 4 个顶点叫做 Σ_1 的点，6 条棱叫做 Σ_1 的直线，4 个面叫做 Σ_1 的平面. 如此我们得到一个共有 14 个对象的集合 σ_1. 读者不难一一验证这个四面体正好是 Σ_1 在 σ_1 上的一个模型，记为 M_1.

再让我们在 Σ_1 中加入新的公理，一直扩充到 Euclid 几何公理系统的全部公理都在内而构成一个公理系统，记为 Σ_2，如前文已指出过，我们可以利用解析几何的成果，在实数集 σ_2 上构造出 Σ_2（即 Euclid 几何系统）的模型 M_2.

应该指出，上述 M_1 和 M_2 也可视为 Σ 在 σ_1 和 σ_2 上的模型. 因为 Σ 的三条公理 I_1，I_2，I_3 显然必须在 M_1 和 M_2 上得到满足. 然而此处作为 Σ 的这三个模型 M，M_1，M_2 显然都是互不同构的. 因为它们所在对象集合之间不存在一一对应关系，更谈不上其他了.

从上面讨论可看出，一个公理系统中的公理愈少，则选取它的模型的自由度愈大. 反之，不断地将一个公理系统扩大（当然要求加进去的新公理，对于原有的公理而言，应保持其独立性和相容性）时，则能以成为该扩大中的公理系统之模型数就不断地减少. 例如，上述 M 不得为 Σ_1 或 Σ_2 的模型，M_1 不能成为 M_2 的模型，而 M_1 和 M_2 均可为 Σ 的模型等.

基于如上所论之意义，人们又将几何公理系统的完备性概念叙述

为:“已知的公理系统叫做完备的,如果它的所有模型都是互相同构的.”在此完备性意义下,人们可以验证Euclid几何公理系统是一个完备的公理系统,因为Euclid几何公理系统有一个在实数域上的模型,通常叫做Descartes模型,进而可以证明Euclid几何公理系统的任何其他模型都和所说的Descartes模型同构,从而都是互相同构的.另一方面,人们也能验证Лобачевский几何公理系统,在上述完备性意义下也是完备的.至于其中的具体验证手续与过程,在这里就不讨论了.有兴趣的读者可查阅文献[5]中4.4节和4.5节的相关内容.在那里还有Hilbert关于完备公理的经典陈述,以及该完备公理与Cantor公理IV_2在Hilbert之Euclid几何系统中的等价性证明.还有Cantor公理IV_2在该系统中的独立性证明等.所有这些以及如何在Лобачевский几何系统的特殊曲面(如等距面和极限球面)上构造不同的几何模型等,都不可能在本书中详加论述.因为一方面,公理化方法和基础问题均始于几何基础的研究,从而作为一本以数学基础问题的讨论为主题内容的著作,不能不从几何基础的讨论开始,并论及其主要的历史发展和思想方法.但在另一方面,几何基础毕竟不是数学基础的中心主题,所以对它的讨论,无论从宽度还是深度来看,都必须受到得体和适度的控制.

第二篇

经典与非经典数学奠基问题

第 2 章　悖论与精确性经典数学的理论基础问题

2.1　古典集合论的诞生及其思想方法

古典集合论是德国大数学家 Cantor 在 19 世纪所创立的一个数学学科，当然，从古典集合论到近代公理集合论的发展来看，集合论更是现代数理逻辑的一个重要分支，对此，读者可参阅文献[8]之绪论中的相关内容. 另外，我们在《集合论导引》[9]第 1 章中讨论过集合论发展的历史概要，其中不仅涉及古典集合论的创立，同时还论及了古典集合论的先驱发展. 在这里，我们就侧重于数学基础方面略述其中的相关内容.

数学发展到 19 世纪，特别是由于当时的工业科学与自然科学蓬勃发展的刺激，使数学进入了一个大发展时期，数学诸分支，不论是几何、代数还是分析，都得到了长足的发展，以至于迫切需要为数学诸分支寻找一个共同的理论基础. 正是在这样的历史背景下，Cantor 系统地总结了长期以来数学之认识与实践，终于在集理论的研究和认识上，从零碎不全的初级阶段上升到系统展开的理论阶段. 实际上，关于集合甚或无穷集合之萌芽，一直可追溯到 Euclid 著述几何原本的时代，因为 Euclid 确立了空间是位置点之无限堆积的观点. 但在往后的很长历史阶段中，人们一直没有认真地研究过集合和无穷集合的概念. 直到 17 世纪，Galileo 发现了“自然数全体”能与“平方数全体”建立一一对应，亦即：

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots, & n, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1^2, & 2^2, & 3^2, & \cdots, & n^2, & \cdots \end{array}$$

从而在此意义上可以认为部分自然数的个数与全体自然数之个数是相同的，这就动摇了自古以来“全体大于部分”这一公认无疑的原则. 实际上，“全体大于部分”这一原则是基于有穷性事物之上抽象出来的，对于无限性对象来说，该原则就未必成立. 从而 Galileo 的发现就大大刺激人们去探索和研究无穷集合，后来，有如 Dedekind 和 Cantor 等数学家，曾

基于有穷集合不可能出现 Galileo 发现的类同情况，进而用“能否与自身之真子集建立一一对应关系”去划分有穷集合与无穷集合. 然而总体上看，在 19 世纪 Cantor 以前，对于无限集的认识和研究，一直还是滞留于零碎不全的认识与研究中，只有 Cantor 才使得对集理论的研究系统化，使之作为一门独立的数学分科确立起来，缔造了一门崭新的数学学科——集合论. 相对于后来发展起来的近代公理集合论而言，通常称 Cantor 当时所建立起来的集合论为古典集合论，又因为 Cantor 仅以朴素的形式陈述它的理论，既没有公理化，更没有形式化，故又有素朴集合论①之称.

对于 Cantor 创建古典集合论的学术意义和历史功绩，应当指出如下两点：

第一，扩充了数学研究对象. 如所知，数学研究对象是在不断扩充之中逐步丰富起来的，例如，微积分的创立完成了数学研究对象从常量到变量的扩充，而概率论的诞生完成了数学研究对象从确定性到随机性的再扩充. 而古典集合论的建立，则完成了数学研究对象由有限与潜无限到实无限的再扩充，也就是说，实无限量性对象是在 Cantor 建立古典集合论之后，才被明确引入数学领域中的. 正因为如此，Hausdorff 才说：“从有限推进到无限，乃是 Cantor 的不朽功绩.”[10]

第二，为精确性经典数学的各个数学分支提供了一个共同的理论基础. 这首先是因为集合论的思想和方法渗透到经典数学的各个分支中，例如，没有集合论就不会有测度论，也就不会有描述性的实变函数论. 又如抽象空间理论的研究，在近代数学的发展中据有重要地位，但各种抽象空间，无非都是具有各种特殊结构的无限集，它们不仅以集的概念作为基础，也从集合论中吸取了研究方法. 再说近世代数主要是探讨具有某些结合规律之元素系统的构造，在这里集合的概念也是基本的，而集合论中的思想方法，也同样渗透进代数领域，如此等等. 其次是整个精确性经典数学都能在集合论基础上被推导出来，这就是说，任何一条数学定理，都能从集合论的思想规定出发，把它推导出来，而且，任何一个数学概念，都能从集合论的概念出发，把它定义出来. 再则正如本书 1.6 节之末所论及的，关于 Лобачевский 几何的相对相容性证明，最后被归结到集合论的相容性证明. 基于如上所论，几乎一致公认，整个精确性经典数学都可奠定在集合论的基础上，也就是说，集合论是经典数学各个分

① 我们称“素朴集合论”，而不叫做“朴素集合论”，完全是遵从数学界的约定俗成.

支的共同的理论基础.

正如上文所已提及，古典集合论的创始者 Cantor 仅以朴素的形式陈述它的理论，既没有明确原始（基本）概念，也没有罗列其不证自明的思想规定. 当然，也更谈不上公理化和形式化了. 虽然如此，只要我们对古典集合论的内容细加分析和概括总结，就会看出 Cantor 当时的几个主要的基本原则或思想方法，不外乎是：概括原则，外延原则，一一对应原则，延伸原则，穷竭原则和对角线方法. 其中概括原则与外延原则用于造集并确定集与集的相等，一一对应原则与对角线方法用于引出基数概念和确定更大基数的存在，延伸原则与穷竭原则实质上用于描叙良序集的生成和实无限研究对象的确立.

首先让我们来谈谈基本概念的问题. 文献[8]中 2.1 节开头指出："任何一个理论系统，都包含着一些不加定义而直接引入的基本概念. 例如，Euclid 几何系统或 Лобачевский 几何系统中的点、直线和平面，…，都是它们所属系统中之基本概念."在这里，集合也是这样一个基本概念，近代公理集合论者，都放弃了对集合下定义的做法，把它作为基本概念引入. 事实上，一个理论系统包含着某些不加定义的基本概念是合乎情理的，因为对任何一个概念下定义，必须借助于比它更为基本的概念，从而在一个理论系统中，如此倒推下去，最后总有一些概念再也找不出比它更为基本的概念用以定义它，只能自相地通过举例、说明或譬如而描述之.

古典集合论的创始者 Cantor 曾想给集合的概念下个定义，他指出："把一些明确的（确定的）、彼此有区别的、具体的或想象中抽象的东西看作一个整体，便叫做集合."Cantor 本人认为如此一番描述已给集合下了一个定义，其实不然，因为诸如整体、总体、总合、集合等都是等价概念，亦就是说，Cantor 在这里使用了与集合相等价的概念（整体）去定义集合概念，也就是 Hausdorff 所指出的："Cantor 在用莫明定义莫明."[10] 所以 Cantor 这类说法，只是一种同义反复，只能当作一种说明，当作是对原始的、人所公认的思维过程的指证. "这种思维过程之演变为更原始的过程，迄今没有实现."[10] 对于集合概念的描述，Лузин 有一个很好的说明："我们想象有一个透明而不可穿过的囊膜，就像一只严密封闭的袋子. 假设在这个囊膜中包含了一个给定的集合 M 的所有元素，而且在这囊膜中，除了这些元素以外，再没有任何别的东西，…，这个包含了所有元素（而且除了它们以外，没有任何别的东西）的透明囊膜，也足以用来很好地表示将诸元素 e 汇集在一起的那个作用，由于这汇集作用的结果，才

产生了集合 M."[12] 根据上述Cantor关于集合的描述和Лузин的说明可知,作为一个集合而言,它所涉及的不仅是构成集合的对象(即它的元素),而更重要的还要涉及使这些对象构成一个整体的那种汇集作用.

现在让我们来谈Cantor创建古典集合论的思想方法.作为Cantor建立古典集合论的一个最重要的思想方法就是概括原则的使用,该原则显得自然和直观,使用起来又方便有力.当然,在Cantor的早期工作中,并没有将该原则的思想明确立为公理,而只是隐蔽地被使用,后来,直到Frege才公开而明确地作为公理模式使用之.所谓概括原则,通俗地说,就是任给一个性质 p,我们就能把所有满足所给性质 p 的对象,也仅由这些具有性质 p 的对象汇集在一起而构成一个集合.用符号来表示就是

$$G=\{g \mid p(g)\}.$$

其中"|"左边的 g 表示集合 G 的任一元素,而"|"右边的 $p(g)$ 表示 G 的元素 g 具有性质 p,又{ }表示把所有具有性质 p 的对象 g 汇集成一个集合.因此,概括原则的另一表达式就是

$$\forall g(g \in G \leftrightarrow p(g)).$$

亦即 G 的任一元 g 必具有性质 p,而任一具有性质 p 的对象必为集合 G 的元素.如果用数理逻辑的术语来说,概括原则指的是任给只含一个自由变元 x 的公式 F,则总有一集 A,它恰由所有满足 F 的 x 所组成.应当指出,概括原则在一阶逻辑中是公理模式,因而不是一条公理,实际上是无穷多条公理,其符号表达式为

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \forall t(t \in y \leftrightarrow \psi(t, x_1, \cdots, x_n)).$$

通常用 Σ_0 表示所有的概括原则公式所构成的集.若对其中所出现的公式 ψ 加以种种不同的限制,如不含量词或不含参数 $x_1,\cdots,x_n$,就能构成 Σ_0 的各种各样的真子集,这是一些特殊类型的真包含于 Σ_0 中的概括原则公式的集合,通常记为 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots$.

对于概括原则的认识和使用,除了上文已经指出的,这是一个公理模式而不是一条公理之外,还应注意如下几点:

(1) 对于概括原则中所涉及的那个用以造集的性质 p,必须是精确的和界线分明的,亦即对于世界上任何对象 x,要么 x 具有性质 p(即 $p(x)$),要么 x 不具有性质 p(即 $\neg p(x)$).如果所给性质 p,存在对象 x,它部分地具有性质 p,或者说不清楚该 x 是否具有性质 p,则该性质 p 就不是精确的或界线分明的,从而也就不是概括原则或Cantor意义下用以造集的性质.例如,所有美男子(性质 p)就不能在Cantor意义下或概括原则意义下组成集合,因为所给性质 p(美男子)不是一个精确的或界

线分明的性质，事实上，存在着这样的男人，他是否具有性质 p（美男子）是不能明确判定的. 还应指出，对于认识、理解和使用概括原则之如上所说的要求，并没有什么明文叙述，只是一种无形中必须遵守和贯彻的前提，从本质上说，这与文献[9]1.4 节所论之下述情况是一致的，就是在经典二值逻辑和精确性经典数学中，一方面不将“无中介原则”明文立为公理；另一方面却将该“无中介原则”贯彻始终. 有兴趣的读者不妨对照分析之.

(2) 在古典集合论中，对于任何一个上述(1)中所论之界线分明的精确性质 p，均可在概括原则意义下构造集合，亦即在精确性质前提下，概括原则的造集功能不受任何限制，完全自由.

(3) 对于任意一个 Cantor 意义下的造集性质 p，运用概括原则所构造出来的集，恰由全体具有性质 p 的对象组成，即任何具有性质 p 的对象必在该集中，而该集中除了具有性质 p 的对象之外不包含任何其他对象.

基于上述讨论可知，由概括原则构造出来的集合与用以构造它的性质是一意确定的，因而集合由它的元素完全决定，那么自然地认为对于两个集合，当且仅当它们的元素完全相同时，才把这两个集合看作是相同的. 亦即任给两个集合 A 和 B，如果对于每个 $a \in A$ 能推出 $a \in B$，反之对于每个 $b \in B$ 能推出 $b \in A$，则称集合 A 与 B 相等，记为 $A = B$. 这就是外延原则. 其符号表达式为

$$A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

其中 $\Leftrightarrow$ 为自然语言中之“当且仅当”的简记，不同于形式语言中的等值词 $\leftrightarrow$，对此在文献[8]2.1 节中有专门说明，可查阅之.

一一对应原则和对角线方法也是 Cantor 建立古典集合论的思想方法，但这两者通常是熟知的，例如在“实变函数论”课程的教材或有关素朴集合论的书籍中都会涉及与之相关的论述，读者也可查阅文献[9]3.4 节及 4.4 节中的相关内容. 在这里，基于从数学基础的角度考虑问题，我们对 Cantor 运用对角线方法去证明全体实数为不可数无穷多一事，还有一番小小的议论，借以和有兴趣的读者共同探讨之. 为了使这番小小的议论在文字上能以前后连贯起见，不得已从一一对应原则的通俗朴素的描述开始. 如所知，任给两个集合 A 和 B，如果存在规则 f，对于每个 $a \in A$，由 f 有唯一确定的 $b \in B$ 与之对应；反之，对于每一 $b \in B$，据 f 有唯一确定的 $a \in A$ 与之对应，则称集合 A 与 B 的元素之间在 f 之下建立了一一对应关系. 其中要注意的是这种一一对应关系总是相对于某个对

应规则而言的，当对应规则 f 改变了，成为某个新的规则 g，则 g 就确定了某个新的一一对应关系，如此等等. 如果集合 M 和集合 N 的元素之间能建立一一对应关系，则称 M 与 N 是对等的，记为 $M \simeq N$. 又若 $M \simeq N$，则称集 M 与 N 有相同的基数(或称等势). 任何集 M 的势记为 $\overline{\overline{M}}$. 又若一个集合 M 的元素能与自然数集 N 的元素之间建立起一一对应关系，则称 M 为可数无穷集. 如所知，人们早已用多种方法证明了全体有理数集合为一可数集. 另一方面，凡是与自然数集合对等的集，它们的基数都相同，记为 $\aleph_0$. 反之，凡是具有 $\aleph_0$ 基数的集合都是可数集.

试看 Cantor 如何利用对角线方法去证明(0,1)区间内全体实数的集为不可数集合. 通常用 R 表示全体实数构成的集，现令

$$R_1 = \{x \mid x \in R \,\&\, 0 < x < 1\}.$$

要证 R_1 为不可数集合. 现反设 R_1 为可数集，于是 R_1 的元可与自然数集 N 之元建立如下的一一对应：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\overbrace{N} & & \overbrace{R} & & & & & & & & \\
1 & \leftrightarrow & \theta_1 & = & 0.\,p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & \cdots \\
2 & \leftrightarrow & \theta_2 & = & 0.\,p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & \cdots \\
3 & \leftrightarrow & \theta_3 & = & 0.\,p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & \\
n & \leftrightarrow & \theta_n & = & 0.\,p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

此处我们将 R_1 的每一元都用十进制小数的形式写出. 现让我们定义一个实数 θ 如下，

$$\theta = 0.\,p'_{11}p'_{22}\cdots p'_{nn}\cdots,$$

其中

$$p'_{nn} = \begin{cases} 2, & \text{当 } p_{nn} = 9 \text{ 时}, \\ p_{nn} + 1, & \text{当 } p_{nn} \neq 9 \text{ 时}. \end{cases}$$

如此，一方面显然有 $\theta \in R_1$，另一方面，θ 却与上面所排列之 R_1 的无穷序列：

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n, \cdots$$

中之每一元素都不相同，因为 θ 与该序列中之任一 θ_i($i = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$)都有一个有穷差位，即 $p'_{ii} \neq p_{ii}$.(此处还请读者考虑一下，上文中为

什么当 $p_{nn}=9$ 时，规定 $p'_{nn}=2$，而不是令 $p'_{nn}=0$. 对此，文献[9]中4.4节相关论述有一个详细的注释，不妨参阅之）从而矛盾，故反设 R_1 为可数集合一事不成立，即 R_1 为不可数集，又 $R_1\subset R$. 故全体实数集 R 为不可数集合.

如上构作新实数 θ 并往证实数全体为不可数的过程便是Cantor对角线方法的一种形式. 这不仅为人们所熟知，且其论证过程之正确性与有效性亦为人们所公认.

虽然如此，根据“相异实数有穷差位判别原则①”和上述“对角线方法”，大家认为已经能够判定实数 θ 与 R_1 中之每个实数 θ_i 相异，但是能否就此断言，根据相异实数有穷差位判别原则和上述对角线方法，就能有效地判定实数 θ 与 R_1 中一切实数为相异？如果我们从无限性对象中之“每一”与“所有”的关系上考虑问题，情况还是较为复杂的. 让我们从 θ_1 开始，依次相接地根据“相异实数有穷差位判别原则”和上述“对角线方法”去判定 θ 与 $\theta_i\in R_1(i=1,2,\cdots)$ 为相异，由于有效地判定 $\theta\neq\theta_i$ 所依据的差位位数 i 总等于 θ_i 的足指数，而 θ_i 之足指数 i 又总等于 R_1 中在此之（包括 θ_i）前已被判定与 θ 相异之实数的个数，即借以有效地判定 R 中实数与 θ 相异之差位位数 i，总等于 R_1 中已被判定与 θ 相异之实数的个数 i. 那么，既然“相异实数有穷差位判别原则”规定差位位数恒为有穷（即 $i<+\infty$），那么 R 中已被判定与 θ 相异之实数的个数也不可能递增到无穷，即恒为有穷个（即 $i<+\infty$），但已设 R_1 中有可数无穷多个实数，如此，在“相异实数有穷差位判别原则”和所给“对角线方法”之下，又如何去判定 θ 与 R_1 中一切实数相异呢？实际上，其中存在着一个看上去不成问题，而实质上却是隐藏得较深的问题值得我们深思，那就是“每一”与“所有”在无限性对象中的关系问题. 现设 M 是一个无穷集合，如果已知 M 之一切元具有性质 p 时，则回过头去分析 M 中之每一元时，无疑可以断言 M 中每一元具有性质 p. 但是反过来，如果已知 M 中每一元具有性质 p，即从 M 中一个一个地取出其元，每取一元均可判定其具有性质 p，能否就此断言 M 中之一切元都具有性质 p？我们认为，要分别情况具体分析，值得深入探讨. 按照传统的推理原则或数理逻辑中全称量词的含义，“每一”与“所有”是画等号的，不论在有限性对象中还是在无限性对象中，都是如此，只要每一 x 具有性质 p，就等于所有 x 具有性质 p. 当然，在有穷集合中，两者画等号显然不成问

---

① 所谓相异实数有穷差位判别原则，指的是二实数相异，当且仅当它们的小数展开式中，存在着某一有穷位上的小数互异.

题，但在无穷集合中，有些具体情况就可能不同了．就像“全体大于部分”的原则在有限性对象中普遍成立，但对无限性对象而言就不适用了．

现设 M 为一无穷集合，又令符号 E 表示“每一”，而 $\Rightarrow$ 表示“如果…，那么…”．我们给出如下两个表达式：

(1) $\forall x(x \in M \& p(x)) \Rightarrow \mathrm{E}x(x \in M \& p(x))$，

(2) $\mathrm{E}x(x \in M \& p(x)) \Rightarrow \forall x(x \in M \& p(x))$．

按照传统观点，上述(1)、(2)两个表达式都无条件成立．而我们认为，上述表达式(1)是无条件成立的，但表达式(2)只能有条件地成立．但这个条件的抽象内涵是什么？在什么情况下表达式(2)不成立，又在什么条件下成立？这是值得研究的．

在古典集合论的思想方法中，还有两条原则值得我们总结，这就是延伸原则与穷竭原则．Cantor 本人并没有明确提出这两条原则，更没有给它们以精确陈述①，但在展开他的无限集理论时，却在实际上贯穿了延伸、穷竭的思想方法，在这里，我们将利用 Peano 系统中的继元与归纳二公理，对延伸与穷竭二原则的基本思想作一说明．当然，关于自然数的 Peano 公理系统是众所周知的．在文献[9]4.1 节中，不仅有对 Peano 系统的一般的分析讨论，还对如何从集合论中导出 Peano 系统，即如何从集合概念出发，用构造性的方法去建立自然数系统，从而把整个算术理论嵌入集合论或奠定在集合论基础之上等，均有严格而详细的讨论．按理说，这一切也都是数学基础问题所应论及的内容，读者不妨参阅之．在这里，仅侧重于延伸、穷竭二原则的思想分析，而作一番类比性的讨论．为了陈述上的连贯和便于对照分析，先将 Peano 系统叙述如下：

“Peano 从不经定义的集合、自然数、后继数与属于等概念出发”[2]，再加上下述 5 条公理而构成关于自然数的 Peano 系统．这 5 条公理是：

(1) 0 是一个自然数，

(2) 继元公理：每个自然数的后继数仍为自然数，

(3) 0 不是任何其他自然数的后继数，

(4) 如果两个自然数 a 和 b 的后继数相等，则 a 和 b 也相等，

(5) 归纳公理：若 M 是由一些自然数所组成的集合，而 M 含有 0，且

---

① 20 世纪 50 年代，徐利治教授根据 Cantor 的延伸与穷竭二原则的思想，在文献[13]中提出了不断延伸原理与相对穷竭原理，后又在文献[14]、文献[15]、文献[16]中作了哲学与数学的分析讨论，从而把 Cantor 的有关原始思想上升到一个新的高度．同时也对延伸、穷竭二原则给出了精确的刻画，请参阅文献[5]8.2 节．

当 M 含有任一自然数 a 时，则 M 也一定含有 a 的后继数. 那么 M 就含有全部自然数.

于是，自然数序列

$$\lambda: 0, 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$$

的生成，可分为两个步骤，首先是按照 Peano 的继元公理所指："在每一个自然数 n 之后，都有一个紧跟在 n 之后的自然数 $n+1$(即 n 的后继元)，" 亦即"若 n 是一个自然数，则有后继元 $n+1$，它仍为自然数." 如此，以 0 为始元，得到 1(即 $0'$)，再引出 2(即 $0''$)，…，以此类推，没有限制地导出了一个自然数不断增长的链，不妨记为：

$$\vec{P}_n: 0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec n,$$

我们称这种链 $\vec{P}_n$ 为延伸变程，它能任意地给出自然数序型而并不包括自然数全体，因而 $\vec{P}_n$ 不具有序型 ω.

由此可见，仅由延伸变程 $\vec{P}_n$ 是不能得到自然数序列 λ 的，要想得到具有序型 ω 的自然数序列 λ，还要引进另一个基本原则，其基本思想(针对生成如上之 λ 序列而言)就是要肯定："我们能将继元公理所规定的延伸手续进行完毕，从而穷举了 0 之后的一切继元而形成 λ 序列." 这就相当于 Peano 公理系统中的归纳公理，可称这条原则为"穷竭原则"，该原则后来又成为近代公理集合论中之"无穷公理"的思想基础.

因此，形成自然数序列 λ 的第二个步骤，便是在延伸变程的基础上，依据穷竭原则的思想将全体自然数排列完毕. 亦即由

$$\vec{P}_n: 0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \cdots \prec n$$

以 $n+1\cdots|\omega$的方式穷举了一切自然数而形成

$$\lambda: 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots|\omega.$$

如此，λ 序列必包含无穷多个元而具有序型 ω，Cantor 称 ω 为真无穷(实无穷或绝对无穷). 相应地，可称那个延伸变程为假无穷(势能无穷或消极无穷).

总之，基于继元公理与归纳公理，并在 Peano 系统中的其他公理配套下，突出地体现了生成自然数全体的两个关键步骤，那就是首先通过继元公理而去一个一个地生成自然数，然后通过归纳公理而去汇集成全体自然数集合，在这里，不仅具体地体现了 Cantor 的延伸与穷竭思想，同时也可看出其中与 Cantor 之概括原则的造集思想的本质联系.

最后，让我们再从观点与方法的角度略谈几句 Cantor 的概括原则. 如所知，在哲学上，方法论与宇宙观在一定条件下是互为通用的. 因此，当您对一些问题摆观点时，往往正是在讲方法，而在您阐述处理问题的

方法时，却也同时在表明您的观点，进而在学术问题上的观点往往就是思想方法，又思想方法也正是学术观点. 上文所论之 Cantor 的概括原则即可视为一例，因为该原则既是 Cantor 用以构造集合的一种思想方法，同时又是他认识和理解"集合"这种研究对象的一种基本观点，在本书中，还将以一定的篇幅去讨论数学基础中的各个学派，在那里，我们将会看到，不同学派或流派对无穷所持的不同观点，也正是他们处理无限性对象时所持的不同方法.

2.2 何谓悖论

悖论一词，在英语中为"paradox"或"absurdity"，从字面上讲就是自相矛盾的谬论. M. Kline 指出：人们为了不把自相矛盾的真相摆在桌面上，才采用了"paradox"或"absurdity"一类的婉转措辞[17]. 在汉语中，不知是否出于同样的考虑. 才用"悖论"这样一个晦涩的词来取代"自相矛盾"这一通俗易懂的说法. 不去管它，反正时间一长，悖论一词也习惯了，其涵义也人人皆知了.

悖论的起源，一直可以追溯到古希腊和我国先秦哲学时代，但在古代及其往后的一个相当长的历史时期中，所谓悖论，只是泛指那些推理过程看上去是合理的，但推理的结论却又违背客观实际的这类推理过程. 其中最有代表性的要算著名的 Zeno 悖论了. M. Kline 在文献[18]中论及 Zeno 的四个悖论时，引述了 Aristotle 的陈述形式，今以其中头两个为例阐明之. M. Kline 指出：Aristotle 在他的《物理》中陈述了第一个悖论，叫做两分法悖论，其说如下："第一个悖论说运动不存在，理由是运动中的物体在到达目的地前，必须到达半路上的点." 这话的意思是说为通过 AB，必须先到 C，为到达 C 必先到达 D，等等. 换言之，若设空间无限可分，从而有限长度含无限多的点，这就不可能在有限时间内通过有限长度[18]. 不妨让我们对以上之说翻译一下，或者说将如上所说讲讲清楚，如图 2.1 所示：

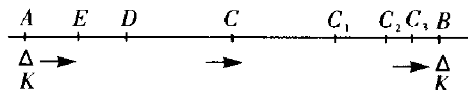


图 2.1

某物 K 欲沿直线 AB，由点 A 处移动到点 B 处，则首先要移到 AB 线段之中点 C，而要到达 C 点，又必须先达线段 AC 之中点 D，为要到达 D 点，则应先

达线段 AD 之中点 E，如此等等．或者说物体 K 要由点 A 移动到点 B，则要经过线段 AB 之中点 C，线段 CB 之中点 C_1，线段 C_1B 之中点 C_2，线段 C_2B 之中点 C_3 等等，直至无穷．总而言之，该物 K 要从 A 点移动到点 B，必须经过无穷多个中点，每经过一个中点，都要有时间，因而在有限时间内，物体 K 不可能由 A 点移动到 B 点，而且不论点 A 与点 B 之间的距离多么小，都是如此．以上的推理过程看上去合理，但其推得的结论完全违背客观实际，因为物体的位移运动是孩童都明白的事．M. Kline 在论及第二个 Zeno 悖论时指出："第二个悖论叫 Achilles（希腊的"神行太保"—— 译者）和乌龟赛跑的悖论．"据 Aristotle 所述："动得最慢的东西不能被动得最快的东西赶上，因为追赶者首先必须到达被追赶者之出发点，因而行动较慢的被追赶者必定总是跑在前头，这论点同二分法悖论一样，所不同者是不必再把所需通过的距离一再平分．"[18] 在这里，也让我们把如上所论之事说明白些，如图 2.2 所示：

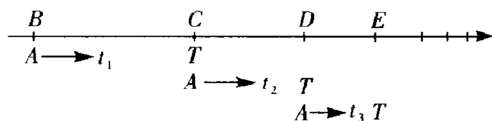


图 2.2

令 A 表示希腊的神行太保 Achilles，又以 T 表示乌龟（tortoise），现 A 在 B 点，T 在点 C 处，令 A 沿 BC 方向追赶 T．如果 A 要赶上 T，则首先要跑完 B 到 C 这段距离，无论 A 跑的速度多么快，总要有一定的时间 t_1 才能跑到点 C 处，即有一定的时间 t_1，则不论 T 爬得多么慢，总能爬去一段距离而到达点 D 处，因而 A 要赶上 T，又必须先跑完 C 到 D 这段距离，无论 A 跑的速度多么快，总要有一定的时间 t_2 才能跑完由 C 到 D 的距离，即有一定的时间 t_2，则不论 T 爬得多么慢，总能爬去一段距离而到达点 E 处，从而 A 要赶上 T，又必须先跑完由 D 到 E 这段距离，如此等等，这种推理过程，循环往复，可以无限制地一直重复下去，所以 A 永远赶不上 T．这种推理过程看上去是合理的，然而推理的结论却与客观现实完全相反．因为任何人都会有如下的实践经验：即移动得慢的东西，一定会在有限时间内被移动得比它快的东西追到．

可以说在很长的历史阶段中，无法对上述一类 Zeno 悖论给出令人满意的解释方法，种种解释都囿于哲理分析．直到近代极限理论和无穷级数理论发展起来以后，基于收敛的无穷级数可以求和的原则，人们才对上文所论之 Zeno 悖论给出逻辑数学的解释方法．即若某物 K 用 1 分钟时间由

点 A 处移动到点 B 处，那么将用$\frac{1}{2}$分钟时间由点 A 处移动到第一个中点 C 处，又用$\frac{1}{4}$分钟时间由点 C 处移动到第二个中点 C_1 处，又用$\frac{1}{8}$分钟时间由点 C_1 处移动到第三个中点 C_2 处，如此等等，直至无穷，该无穷多个时间的和将是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

如所知，这是一个收敛的无穷级数，其和正好是 1 分钟时间，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$. 所以某物 K 能在有限时间内由点 A 处移动到点 B 处，并非无穷多个有穷时间之和总为无穷.

然而问题又来了，因为人们随之而将 Zeno 悖论引申为下述抛球问题，即设有甲、乙二人互相抛球，甲先用$\frac{1}{2}$分钟时间把球抛给乙，而随之乙又用$\frac{1}{4}$分钟时间把球抛回甲手中，而甲又随之用$\frac{1}{8}$分钟时间把球抛回到乙之手，如此往复以至无穷；那么既然承认收敛的无穷级数能以求和，那么也可对甲乙二人所费抛球时间加以求和，这就是

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

那么问抛球手续自开始进行到 1 分钟时，球落在甲手中还是乙手中?或者说，既然收敛的无穷级数可以求和，那么对上述甲、乙二人抛球过程所用之时段序列当亦可求和，因而自始至 1 分钟时，该抛球过程终止，故问此时球在何处?对此问题，潜无限论者由于不承认无穷过程能进行完毕，只承认可以无限制地进行下去，即永远在进行之中，从而抛球手续永远只能滞留于无限制的往复进程之中，所以潜无限论者对此问题可以避而不答，但实无限论者却承认往返无穷之抛球手续是可以进行完毕的，因而无法回避这个问题，却又无法回答这个问题. 人们也在这一意义下，把上述抛球问题叫做抛球悖论. 这也可视为 Zeno 二分法悖论的一种引申，该引申了的 Zeno 悖论(即抛球问题)在西方数理哲学界流传一时. ①

在历史上，还有另一种情形而被称之为悖论的，那就是由于新观念的发现和引入，而违背了具有历史局限性的传统观念. 因而这就不是推理看

① 1982 年，徐利治、朱梧槚等给出了抛球悖论的一种解释方法，详见文献[126]及文献[5]的 9.1～9.3 节.

上去好像是合理的问题,而是传统观念貌似真实之事了.例如,我们在 2.1 节中所论及之 Galileo 的发现,即“平方数与自然数一一对应”而矛盾于“全体大于部分”这一传统原则,当时也有 Galileo 悖论之称,这就不是该发现在推理上有什么问题,而是从有限性对象关系中抽象出来的(全体大于部分)原则,对于无限性对象不能适用的实情了.又例如,我们将在下文中要论及的古代 Pythagoras 学派成员 Hippasus 的发现,即等腰直角三角形之直角边与其斜边不可通约的事实,从而矛盾于“一切量都可用有理数表示”的传统信条.后来也被叫做 Hippasus 悖论.诸如此类的悖论还可列举,但所有这些均与当今意义下所说的悖论之含义存在较大距离.

那么,所谓当今意义下所说之悖论的含义又是什么呢?或者说,现在是怎样去定义悖论这个概念的.曾有一类流行的说法,如“悖论是一种导致逻辑矛盾的命题.这种命题,如果承认它是真的,那么它又是假的,如果承认它是假的,那么它又是真的.”[19] 又如“悖论是指这样一个命题 A,由 A 出发,可以找到一语句 B,然后,若假定 B 真,就可推得 $\neg B$ 真,亦即可推出 B 假.若假定 $\neg B$ 真,即 B 假,又可推导出 B 真.”[20] 再有如“一个命题构成一个悖论,如果由它的真可以推出它的假,而由它的假又可推出它的真.”[21] 诸如此类的定义法,本质上是一样的,无非是说,悖论就是一种肯定与否定相等价的复合命题,其符号表达式或可记为 $A \Leftrightarrow \neg A$.悖论概念的这种定义法,不能说它是错的,还应说它是相当合理的,但应指出,还有不足之处,或者说尚不够全面.第一,任何一个悖论,实质上都相对地被包含在某个理论体系中,例如,我们下文要论及的 Russell 悖论和 Cantor 悖论等,都是被包含在古典集合论中的悖论.可能有的悖论看上去不针对哪个理论系统,其实只是该悖论所属之系统的原始概念和基本原则没有明朗化罢了.否则,如果竟有这样一个悖论,它将被包含在历史的和将来的任何一个理论体系中,或者不被包含在历史的和将来的任何一个理论体系中,那么,我们就既不要去研究什么悖论的成因,也不必去考虑排除悖论的办法,因为既有这种绝对的悖论出现,那么研究它也无济于事.当然,我们也不相信会有这种悖论出现.由此可见,当我们给悖论下定义时,如果忘记了“相对于某一理论体系”这个前提,将会造成怎样的误解.第二,并不是每个悖论都要被陈述为一个命题或某一语句的形式,有的悖论往往要以一个推演过程来表述.第三,人们也并不习惯于把每个悖论都化归为“肯定等价于否定”的形式,也可用某个系统中并存的两个互相矛盾的命题来表述一个悖论.例如,我们将在下文中要论及的 Cantor 悖论,大家都习惯于把它表述为古典集合论中的两个互

相矛盾的命题.既没有也不必化归为两个矛盾命题的等价式.总之,孤立地用 $A \Leftrightarrow \neg A$ 去作为悖论的定义是不够全面的.所以,我们主张采用 A. A. Fraenkel 与 Y. Bar-Hillel 的说法:"如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的,但在这个理论中,却推出了两个互相矛盾的命题,或者证明了这样一个复合命题,它表现为两个互相矛盾的命题的等价式.那么,我们就说这个理论包含了一个悖论."[22] 应当说,这样来定义悖论较为全面合理,因为在这里,首先指明了任何一个悖论,总是相对于某一理论系统而言的,其次又指出了一个悖论,可以表现为某一理论系统中之两个互相矛盾的命题的形式,同时又指出,悖论也可集中地表现为"肯定等价于否定"的复合命题.照此看来,上文所述的那种 $A \Leftrightarrow \neg A$ 的定义方法,只是反映了 Fraenkel 与 Bar-Hillel 陈述中之最后两句话,因而不够全面.在此还应特别指出,Fraenkel 与 Bar-Hillel 的如上陈述中的第一句话,不光是指明了任一悖论总相对于某个理论系统,更重要的是强调了该系统的公理和推理原则看上去是合理的,如果疏忽了这一点,那么大家就可轻而易举地将一些明显的矛盾命题,凑合起来构成一个系统,然后宣布已在该系统中创造性地发现了悖论.

公元前 6 世纪,克里特哲学家 Epimenides 构造了一个命题:一个克里特人说:"所有的克里特人所说的每一句话都是谎话."现在问该命题是真是假,若设其为真,那么因为说这句话的人也是一个克里特人,从而按该命题的结论可知其为假,这就是说,由这句话为真可推知该话为假.当然,若设这是一句假话,则未必导致矛盾,亦即由该命题之假不能推出其为真.但仅就一命题之真可导出该命题为假这一点而言,也够引人注目了,并与上文所言之当今意义下的悖论概念已有一半吻合了,亦可在这个意义上,把 Epimenides 所构造的这个命题视为当今意义下之悖论的直接起源,在此顺便指出,也有把上述 Epimenides 命题误认为当今意义下之悖论的情况出现过.例如,"据说有一个克里特人说:'凡克里特人都说谎',结果无论这句话是真是假,都引起矛盾".[23]"古希腊时代一个克里特岛上的人说:'克里特岛上的人是说谎者'.如果这句话真,则他自己(是克里特岛上的人)便说谎,从而这句话假.如果这句话假,则克里特岛上的人不说谎,而这句话可为真".[24] 又如文献[25]中亦有类似陈述.其实诸如此类的说法都是一种误解或疏忽,因为若设 Epimenides 命题为假,应推出并非每个克里特人总说谎,但推不出这句话为真话.对此,有兴趣的读者还可查阅文献[26]～文献[28]中相关内容的讨论.

类同于 Epimenides 命题的例子是可以构造的,例如,"上帝是全能

的，全能就是胜过一切.”试问此话真、假如何？若设该话为真，则可问："上帝能否创造一个对手来击败上帝呢？"如果能，则上帝就要被上帝创造出来的对手击败，故上帝并非全能.如果不能，就说明上帝还有事情做不到，因而并非全能.不论何说，均导致"上帝全能"为假，但是反设这句话为假，却并不导致任何矛盾，全能的上帝本来就不存在.

上文所论之现代意义下的悖论概念，也可这样表述："一个理论系统，其基本概念和思想原则看上去是合理的，但在系统中却发现有命题 A，设 A 为真，导致矛盾，设 A 为假，也导致矛盾.用符号来表示，即 $A \vdash B, \neg B \& \neg A \vdash B, \neg B$（当然，实质上是和 $A \Leftrightarrow \neg A$ 一回事），那么，就说在该理论中出现了悖论".如此，上述 Epimenides 命题或"上帝全能"就都不构成现代意义下的悖论，因为在那里，只有 $A \vdash B, \neg B$，但是没有 $\neg A \vdash B, \neg B$.另一方面，上述二例虽不构成现代意义下的悖论，却也指明了一种逻辑上的道理，那就是当否定者自身被包括在被否定之对象中时，则否定者本身必然走向它的反面."上帝全能"原要否定一切，而否定者上帝本身也置身于这一切之中，结果走向反面，上帝自身也被否定. Epimenides 命题中的那个克里特人也是一样，由于他自身也是克里特人，必然导致他自身说谎.

公元前 4 世纪，Eubulides 顺着 Epimenides 命题的思路，构造了一个命题，"现在我说的是一句假话."后来，人们又把 Eubulides 命题等价地改述为下述命题：

在本页本行里所写的那句话是谎话.

由于上一行里除了这句话本身之外别无其他的话，因此，这是一句话中有话的话，而且被套在其中的话就是套它之话本身，于是若设该话为真，则就要承认该话之结论，而其结论是指明这是一句假话，而所指的那一行中除了该话本身之外别无其他话，从而推出这是一句假话.又若设该话为假，则应肯定该话结论之反面为真，而该话结论之反面是指明这是一句真话，同样因为所指的那一行中除了该话本身之外别无他话，从而又推出这是一句真话.总之，设其为真导出矛盾，设其为假也导出矛盾.哪种说法都不行.因而这是一种符合现代意义下之悖论概念的悖论.人们称之为"强化了的说谎者悖论"或"永恒性说谎者悖论".

后来，Russell 还对 Epimenides 命题指出，如果在 Epimenides 命题再加上一个前提，即先假定"在此克里特人说这句话之前的每个克里特人所说的每句话为假话"，则加了这个前提的 Epimenides 命题也成为现代意义下的悖论.因设其为真可推出它为假是无疑的.现再设其为假，则至

少有一个克里特人说过真话，但在所加前提下，也就只有该克里特人所说的这句话为真话了. 因而就由其假也可导出其为真. 从而也就符合现代意义下的悖论概念了.

对于上述“强化了的说谎者悖论”而言，问题出在什么地方？主要在于语无层次，或说语言层次不分，被论断是真是假的话和论断它的话混而为一，套在同一个层次上了. 后来，Tarski 还对这个“永恒性说谎者悖论”进一步概括，给出了一个严格的表述形式，如下所述：

首先，按照“命题为真”的含义，有这样的原则：

(1) X 是真的，当且仅当 P.

这里 P 是任意一个命题，而 X 是这一命题的名称.

现考虑命题：

C 不是真的.

现用印刷上的缩写符号 C 来表示本页上一行里所写下的那个命题. 于是应有：

(2)“C 不是真的”等同于 C.

由(1)可知：

(3)“C 不是真的”是真的，当且仅当 C 不是真的.

由(2)和(3)可知：

C 是真的，当且仅当 C 不是真的.

矛盾.

问题在何处？问题在“C 不是真的”本来是一个论断命题 C 是真是假的命题，但在这里，由于“C 不是真的”等同于 C，因而被论断的命题 C 又是论断 C 的命题本身. 所以仍然是论断者和被论断者混而为一. 不妨把这种混而为一的情况叫做“自关联”. 现让我们设法避开这个自关联，矛盾能否由此消除呢？请看下述古代学者 Socrates 和 Plato 的对话：

Plato：下面 Socrates 说的是假话；

Socrates：上面 Plato 说的是真话.

现问 Socrates 语是真话还是假话，设其为真，则应承认 Plato 语为真，按 Plato 语的结论，则应肯定 Socrates 语为假. 故由其真可推出其为假. 反之，设 Socrates 语为假，则应承认 Plato 语为假，故应肯定 Plato 语之结论的反面为真，因而又推出 Socrates 语为真，如此又由其假推知其为真. 类似地问 Plato 语的真、假时亦将导致悖论，这叫做 Socrates-Plato 悖论.

这说明避开了自关联也会出矛盾. 实际上，这里的 Plato 语本来是用

于论断Socrates语之真、假的，而被论断的Socrates语，却又成为论断(用以论断 Socrates 语的)Plato 语，所以兜了一圈，仍然混乱了语言层次，这和自关联是换汤不换药，前者是混而为一，后者是循环而为一．还有一位英国数学家，把上述 Socrates-Plato 悖论改写为如下的形式：

在一张白卡片的一面写：

这张卡片背面的句子是真的．

在同一张卡片的另一面写的是：

这张卡片背面的句子是假的．[25]

显然，这和 Socrates-Plato 悖论在内容实质上是一样的．

现在让我们在下一行写上一句话：

(A) 现在正在下雨．

再在下一行写一句话：

(B) 前一行里写的那句话是谎话．

这是不能形成悖论的．语句(B)是真是假，要看(A)的真假，而(A)的真假决定于现在是否下雨．在这里，语句(A)是被论断的话，而语句(B)是对(A)作论断的话．所以语言层次分明，既不混同又不循环，这表明要排除上文所论之“强化了的说谎者悖论”和“Socrates-Plato 悖论”，关键在于语言分层，这既是近代语义学诞生和发展的一个背景，同时也是近代语义学所研究的一个重要内容．

美国数理逻辑学家 Smullyan 曾写了一本书，其书名为《这本书的书名叫什么?》，现将该书放在桌子上，另有甲、乙、丙三个人围在桌子边．因为甲不识字而指着该书问：“这本书的书名叫什么?”而乙又接着指着该书说：“这本书的书名叫什么?”此时丙在考虑，刚才乙讲的这句话是回答甲的问题，还是在重复甲的提问呢?而且乙可以让别人总是猜不着．但若乙诚心想回答甲的问题，还是可以把话说清楚的．因为只要说：“这本书的书名就叫做《这本书的书名叫什么?》．”这就不致引起丙的烦恼了．在这里，同样存在着语义学问题．

2.3 数学危机

所谓数学危机，指的是在数学发展的某个历史阶段中，出现了一种相当激化的、涉及整个数学理论基础的矛盾．“公元前 5 世纪，一个希腊人，Pythagoras 学派的 Hippasus，发现了等腰直角三角形的直角边与斜

边不可通约，从而导致了数学的第一次危机.”[23] 事情是这样，当时人们还处在刚刚从自然数概念脱胎而形成有理数概念的早期阶段，对于无理数的概念一无所知. 因此，当时人们的普遍见解是确信一切量均可用有理数来表示，亦就是说，在任何精确度的范围内的任何量，总能表示为有理数，这在当时，已成为希腊人的一种普遍信仰. 这也是 Pythagoras 学派的信条，在 Pythagoras 看来，不仅深信数的和谐与数是万物之本源，而且宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数比. 另外，Pythagoras 学派的重大贡献之一是证明了勾股弦定理，也就是直角三角形两直角边之平方和等于斜边的平方，然而 Hippasus 指出：取一直角边均为 1 的等腰直角三角形，如果其斜边为整数比，约去分子分母间的公因数后为 m/n，那么 m 与 n 中至少有一个是奇数，由勾股弦定理知有 $1^2+1^2=\left(\frac{m}{n}\right)^2$，于是 $2=m^2/n^2$，故 $m^2=2n^2$，所以 m 是偶数，那么，一方面由于 m 与 n 中必有一个为奇数而知 n 为奇数，另一方面，既然 m 为偶数，当可表为 $m=2k$，于是 $4k^2=2n^2$，故 $n^2=2k^2$，因而 n 亦为偶数，矛盾. 这表明所说等腰直角三角形之斜边无法用整数或整数之比去表示. 这就严重触犯了 Pythagoras 学派的信条，同时也冲击了当时希腊人的普遍见解，不能不使人们感到惊奇不安. 直接动摇了这个历史的数学基础，传统观念受到了挑战. 正如 2.2 节所提及的，Hippasus 的这一发现，也被叫做 Hippasus 悖论. 相传 Pythagoras 学派因此而将 Hippasus 投入海中处死，因为他在宇宙间搞出了一个直接否定他们学派信条的怪物，而且他不顾学派的规定，敢于向学生披露新的数学思想. 当然，Hippasus 的伟大发现是淹不死的，它以顽强的生命力而被广为流传，迫使人们去认识和理解“整数及整数比（有理数）不能包括一切几何量”. 迫使 Pythagoras 学派承认这一悖论和提出单子概念去解决这一矛盾. 单子概念是一种如此之小的度量单位，以致本身是不可度量却同时要保持为一种单位. 这或许是企图通过“无限”来解决问题的最早努力. 但是，Pythagoras 学派的这种努力又引起了 Zeno 的非难. Zeno 认为一个单子或者是 0，或者不是 0，如果是 0，则无穷多个单子相加也产生不了长度，如果不是 0，则由无穷多个单子组成的有限长线段应该是无限长的，不论何说都矛盾[29]. 如上所说之 Hippasus 的发现所引起的矛盾局面，连同 2.2 节中所言及的 Zeno 悖论在内，都被视为构成数学第一次危机的组成部分. 另一方面，这种危机局面的出现，也进一步促使人们，从依靠直观感觉与经验而转向依靠证明，推动了公理几何学与逻辑学的诞生和发展.

数学史上把 18 世纪微积分诞生以来在数学界出现的混乱局面称为数学的第二次危机. 如所知，在 17 世纪和整个 18 世纪，由于微积分理论的产生及其在各个领域里的广泛应用，使得微积分理论得到了飞速的发展. 但在另一方面，当时的整个微积分理论却是建立在含混不清的无穷小概念上，从而没有一个牢固的基础，遭到了来自各个方面的非难和攻击.

大主教 Berkeley 于 1734 年向数学家质疑：所谓瞬时速度是 $\Delta S/\Delta t$ 在 Δt 趋向于 0 时的值，那么 ΔS 或 Δt 是什么？如果 Δt 和 ΔS 是 0，则 $\Delta S/\Delta t$ 就是 0/0，从而无意义. 如果它们不是 0，即使极为微小，其结果只能是近似值，绝不是所求瞬时速度的精确值，总之，不论它们是 0 或不是 0，都将导致荒谬. 对此，文献[46]中的相关内容，陈述得更具体、更清楚，不妨参阅并概述如下：大家都熟悉自由落体下落距离的公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$，因为 $\frac{1}{2}g$ 不过是一常数. 为简单计，讨论 $S=t^2$ 就可以了. 当 $t=t_0$ 时，下降距离为 $S_0=t_0^2$，当 $t=t_0+h$ 时，其下降距离将为 $S_0+L=(t_0+h)^2$，故物体在 h 秒内所降之距离为 $L=(t_0+h)^2-S_0=(t_0+h)^2-t_0^2$，从而 h 秒内物体下落之平均速度为

$$\frac{L}{h}=\frac{(t_0+h)^2-t_0^2}{h}=\frac{2t_0h+h^2}{h}=2t_0+h,$$

显然，当时间的间隙 h 越小时，平均速度就与瞬时速度或真正速度越接近，但是不论 h 多么小，只要 h 不等于 0，则平均速度就不等于点速度或真正速度. 如果 $h=0$，即考虑那一点的速度，但此时已经没有距离的改变，从而所说之 $\frac{L}{h}$ 变成了没有意义的 $\frac{0}{0}$，从而也无法求得真正的速度.

Newton 和 Leibniz 也曾为摆脱此困境而分别提出种种解释，例如：

(1) 说 h 是无穷小，故 h 不等于 0，因而认为 $\frac{L}{h}=\frac{2t_0h+h^2}{h}$ 有意义，并可化简为 $2t_0+h$，但无穷小与有限量相比，可以略而不计，于是 $2t_0+h$ 就变为 $2t_0$，并且 $2t_0$ 就是 $t=t_0$ 时的点速度.

(2) 说 $\frac{2t_0h+h^2}{h}$ 的终极比(ultimate ratio)为 $2t_0$，也就是 $t=t_0$ 时的速度.

(3) 说 h 趋于 0 时，既不在 h 变为 0 之前，也不在 h 变为 0 之后，而正好在 h 刚刚达到 0 时，$\frac{2t_0h+h^2}{h}$ 之值为 $2t_0$.

不论哪种说法，无非都是为消除如下的矛盾而使之能摆脱困境，这

个矛盾是：一方面要使$\frac{2t_0h+h^2}{h}$有意义，必须h不等于0；另一方面，要使$t=t_0$时的真正速度为$2t_0$，则又必须$h=0$. 那么同一个数量h在同一个问题中，如何能既等于0，同时又不等于0呢？这个矛盾，人们也曾称之为Berkeley悖论.

在这一时期，从各个方面对微积分理论的种种非难和攻击中，要算Berkeley大主教所作的批评最为激烈. "Berkeley批判了Newton的许多论点，例如，在《求曲边形的面积》一文中，Newton说他避免了无穷小，他给x以增量，展开$(x+0)^n$，减去x^n，再除以0，求出x^n的增量与x的增量之比，然后扔掉0的项，从而得到x^n的流数. Berkeley说Newton首先给x以一个增量，然后让它是0，这违背了背反律."[30] "至于导数被当作y与x消失了的增量之比，即dy与dx之比，Berkeley说它们既不是有限量，也不是无穷小量，但又不是无. 这些变化率只不过是消失了的量的鬼魂".[30] 大主教Berkeley之所以猛烈批评微积分，主要是因为他对当时自然科学的发展所造成之对宗教信仰的日益增长的威胁极为恐惧. 但也正由于当时的微积分理论没有一个牢固的基础，致使来自各方面的非难和批评言之有物. 所以，"在整个18世纪，对于微分和积分运算的研究具有一种特殊的痛苦，因为一方面是纯粹分析领域及其应用领域内的一个接一个的光辉发现，但与这些奇妙的发现相对照的却是由其基础的含糊性所导致的矛盾愈来愈尖锐."[31] 这就不能不迫使数学家们认真对待这个Berkeley悖论，借以解除数学的第二次危机，这就直接导致了微积分的Cauchy Weierstrass时代. Cauchy详细而又系统地发展极限论，Dedekind在实数论的基础上，证明了极限论的基本定理，Cantor与Weierstrass都加入了为微积分理论寻找牢固的基础而努力工作的行列，发展了ε-δ方法和极限理论，避开了实体无限小和无限大概念的设想和使用，这就是今天所说的标准分析.

普遍认为，由于严格的微积分理论的建立，上述数学史上的两次危机已经解决. 但在事实上，建立严格的分析理论是以实数理论为基础的，而要建立严格的实数理论，又必须以集合论为基础，而古典集合论的诞生和发展，却又偏偏出现了一系列悖论，并由此而构成了更大的危机.

悖论的出现，原来并没有真正引起数学家和逻辑学家的重视，似乎古昔相传的悖论，只是人为地制造出来的东西，并不值得介意. 直到19世纪90年代，悖论在作为整个数学之理论基础的集合论中出现了，这样才开始引起数学家们的注意.

古典集合论的创始者 Cantor 于 1895 年第一个在他自己所创立的集合论中发现了悖论，但他没有公开，也不敢公开. 然而矛盾是包不住的，1897 年，原先由 Cantor 自己所发现的这个悖论还是由 Burali-Forti 发现了，并且公诸于世，因而人们就称之为 Burali-Forti 悖论. 现陈述如下：

首先，在超限数论中，可证得下述定理成立[32].

定理 1 任何一个良序集 A，不能与 A 的任何截段 A_a 相似.

定理 2 凡由序数所组成的集，按其大小为序排列时，必为一良序集.

定理 3 一切小于序数 α 的序数所组成之良序集 W_α 的序数 $\overline{W_\alpha}$ 就是序数 α，即 $\overline{W_\alpha}=\alpha$.

其次，让我们将一切序数汇集起来构成一集，记为 Γ，亦即

$$\Gamma=\{x \mid x\ \text{为一序数}\},$$

根据 Cantor 用以造集的概括原则来构造上述集合 Γ 是完全合理的. 于是，由上述定理 2 可知，Γ 能以排成一良序集，故良序集 Γ 有一序数，记为 r，即 $\overline{\Gamma}=r$. 既然 Γ 是一切序数所组成的良序集. 应有 $r\in\Gamma$，那么 Γ_r 便是 Γ 之元 r 截 Γ 所得的一个截段，由定理 3 可知 $\overline{\Gamma_r}=r$. 如此将由上述 $\overline{\Gamma}=r$ 与 $\overline{\Gamma_r}=r$ 而推知 $\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma_r}$. 这表明良序集 Γ 的序数与它的一个截段 Γ_r 的序数相同，因而 Γ 与 Γ_r 相似，从而矛盾于定理 1. 大家称这个矛盾为 Burali-Forti 悖论.

在 Burali-Forti 悖论公布后两年，即 1899 年，Cantor 又发现了一个矛盾，并公诸于世，人们称之曰 Cantor 悖论，陈述如下：

如所知，在古典集合论中有下述定理.

定理(Cantor) 任何集合 M 的势(基数) $\overline{\overline{M}}$ 小于其幂集 $\mathscr{P}(M)$ 的势 $\overline{\overline{\mathscr{P}(M)}}$. 其中所谓幂集，即对任何集 M 而言，由 M 的一切子集所构成的集合叫做 M 的幂集，并记为 $\mathscr{P}(M)$.

现据 Cantor 的概括原则，可构造一切集合所组成的集合，记为 $\mathscr{U}$，即

$$\mathscr{U}=\{x \mid x\ \text{为一集}\}.$$

如此，一方面由上述 Cantor 定理知有 $\overline{\overline{\mathscr{U}}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathscr{U})}}$，另一方面，又可证 $\mathscr{P}(\mathscr{U})$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个子集. 事实上，设 $x\in\mathscr{P}(\mathscr{U})$，则 x 为 $\mathscr{U}$ 的一个子集，故 x 为一集合，按 $\mathscr{U}$ 的定义与构造，应有 $x\in\mathscr{U}$，于是 $\mathscr{P}(\mathscr{U})\subseteq\mathscr{U}$，从而应有 $\overline{\overline{\mathscr{P}(\mathscr{U})}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{U}}}$，矛盾. 人们称之曰 Cantor 悖论.

直到 1900 年，虽然在古典集合论中出现了如上所述的一些悖论，但也并没有引起数学家们的多大不安，因为大家认为悖论的出现，只是牵涉到集合论中的一些较为专门的技术问题，只要作些技术性的修改或调

整，便能解决问题. 因而在这种认识之下，不仅没有为悖论的出现而不安，相反地，一种充满安全感的情绪笼罩着大家. 正如文献[24]中所述："集合论的概念是逻辑概念，而且一般认为集合是属于逻辑的，逻辑的理论似乎应该是没有矛盾的. 因此，归约到了集合论，看来快要达到目的了. 的确，在 1900 年于巴黎召开的国际数学会议上，法国大数学家 Poincaré 宣称：数学的严格性，看来今天才可说是实现了. 事实上，当时的数学家都喜气洋洋，非常乐观."[24]"以前，对于非欧几何的不矛盾性，欧氏几何的不矛盾性，实数论的不矛盾性等，人们虽然不能马上作出证明，但大家都相信不会导致矛盾，事实上，也从未遇到出现矛盾的麻烦."[24]"现在已把这些理论的不矛盾性直接间接地归约到集合论的不矛盾性，以致人们更加相信集合论绝对不会出现矛盾."[24] 在这里，读者当能回想起本书 1.6 节之末所作的一番相关的论述.

然而，如上所述的这种安全的想像未能维持多久，事隔不到两年，著名的 Russell 悖论被公诸于世，这可惊动了整个西方哲学界、逻辑学界和数学界. 因为人们对 Russell 悖论稍加分析，就会看出，只要用逻辑术语来替代集合论术语，Russell 悖论就要直接牵涉到逻辑理论本身，从而直接冲击了数学与逻辑这两门一向被认为是最严谨的学科，这就不能不使数学家和逻辑学家去认真对待和研究悖论问题了. 现将 Russell 悖论陈述如下：

集合可分为两种：一种是本身分子集，例如，"一切概念所组成的集"，由于它本身也是一个概念，所以必为该集自身的一个元素. 又如"一切集合所组成的集合"也是一个本身分子集，因为按定义知任何集都是该集的元素，而其本身即为一集合，因而也不能例外地为该集（即其自身）的一个元素. 另一种是非本身分子集，即其本身不是它自身的元素. 例如，自然数集合决不是某个自然数，因此自然数集合 N 不可能是 N 的一个元素，即 $N \notin N$. 如此，任给一集 M，则 M 要么是本身分子集，即 $M \in M$，要么是非本身分子集，即 $M \notin M$. 现据 Cantor 的概括原则，可将一切非本身分子集汇集起来构成一集，亦即

$$\Sigma = \{x \mid x \notin x\}.$$

此处 $x \notin x$ 表示集合 x 不是它自身的元素，即 x 为一非本身分子集. 另外，我们也用 $x \in x$ 来表示集合 x 为其自身的一个元素，此时 x 便是一个本身分子集了. 现在要问上述一切非本身分子集（$x \notin x$）构成的集 Σ 是哪一种集合？即问此集 Σ 是本身分子集，还是非本身分子集？若设 Σ 为本身分子集，则 Σ 为其自身的一个元素，而 Σ 的每个元素都是非本身分子

集，从而作为 Σ 之元的 Σ 也必须是一个非本身分子集．故由 Σ 为本身分子集而推得 Σ 为非本身分子集，亦即由 $\Sigma \in \Sigma$ 而推出 $\Sigma \notin \Sigma$，或者说由 Σ 具有 $x \in x$ 的性质推得 Σ 具有性质 $x \notin x$，总之矛盾．现再设 Σ 为一非本身分子集，又按 Σ 的构造可知，任何非本身分子集都是 Σ 的元素，故 Σ 作为非本身分子集亦应为 Σ 的一元素，即 $\Sigma \in \Sigma$，故 Σ 是一个本身分子集．如此，又由 Σ 为非本身分子集而推得 Σ 为本身分子集，亦即由 $\Sigma \notin \Sigma$ 而推得 $\Sigma \in \Sigma$，或者说由 Σ 有性质 $x \notin x$ 而推得 Σ 具有性质 $x \in x$，还是矛盾．亦即不论哪种说法都说不通．这就是著名的 Russell 悖论．

Russell 悖论作为古典集合论中的一个悖论，不仅很快发现它可化归为最基本的逻辑概念的形式，而且进一步发现能用日常语言来表述它的基本原则，Russell 自己就在 1919 年把它改为著名的“理发师悖论”．现陈述如下：

李家村上所有有刮胡子习惯的人可分为两类，一类是自己给自己刮胡子的；另一类则是自己不给自己刮胡子的，李家村上有一个有刮胡子习惯的理发师自己约定：“给且只给村子里自己不给自己刮胡子的人刮胡子．”现在要问这个理发师自己是属于哪一类的人？如果说他是属于自己给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他不应该给他自己刮胡子，因而是一个自己不给自己刮胡子的人．再设他是属于自己不给自己刮胡子的一类，则按他自己的约定，他必须给他自己刮胡子，因之他又是一个自己给自己刮胡子的人了．哪种说法都说不通，这就是所谓理发师悖论．

顺便指出，Zermelo 也曾同时独立地发现了这个悖论，所以也有 Russell-Zermelo 悖论之称．Russell 悖论的出现，不仅对上文所述之 Poincaré 关于“完全的严格性已经达到”这个说法是一个否定，而且直接动摇了 Poincaré 企图通过集合论来为微积分奠基的信心．另外，有如 Dedekind 正在为分析数学和数论奠基而著述“什么是数，其意义如何？”一文，又有逻辑学家兼数学家 Frege 的巨著《关于算术概念》也接近完成，但由于他们的理论，都涉及集合论及其基本概念，从而一时延搁了所说的这些著作的出版．特别是 Frege 还感慨地写道：“对于一个科学家来说，没有一件事比下列事实更为扫兴的了，即当他的工作刚刚完成的时候，突然发现它的一块基石崩塌了下来，当本书（指上述《关于算术概念》一书）的印刷快要完成的时候，Russell 先生给我的一封信，使我陷于这样的境地”．[24]

综上所述，人们恰当地把集合论悖论的出现及其所引起的争论局面

称之为数学的第三次危机．应当指出，在一定程度上讲，数学第三次危机乃是前两次危机的发展和深化，因为集合论的悖论所涉及的问题更加深刻，涉及的范围更为广阔．本书后续两章的内容，实际上就是从某一角度全面讨论数学的第三次危机，因为后续两章的内容，将始终围绕着对这次危机的产生和寻找解决方案等等情况去作分析讨论．

2.4 二值逻辑悖论举例

2.2 节和 2.3 节中，已经论及一些古昔相传的悖论和古典集合论中的若干悖论，本节将继续给出一些流传较广的悖论，以供大家分析讨论．

Richard 悖论是在 1905 年被揭示的．今选定一种语言，例如英语，则任一英语语句，它总是由 26 个英文字母中的一些字母（可重复出现）、空格和标点等组成一个符号序列，特别应指出，该符号序列是有穷长的，否则将是一句永远说不完的话而不成其为语句了．总之，我们把任一英语语句或一段话理解为由 29 个符号中任选并可重复出现的有穷符号序列．如所知，“由一切这样的元——这种元，能用一有限或可数的符号系中的有限多个符号来表示——所组成的集是可数的，这里，在有限符号系的情况下容许任意长的符号复合．事实上，

$$\aleph_0 + \aleph_0^2 + \cdots + \aleph_0^n = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0$$

$$n^1 + n^2 + n^3 + \cdots = \aleph_0$$

例如，所有用有限多个字母拼写成的任意长的字（即有意义或无意义的字母的复合）所组成的集是可数的．同样，由一切书籍、一切交响乐章以及诸如此类的东西组成的集也是如此．”[10] 因此，如上所说的一切英语语句构成之集为可数集合，一切由有限句英语写出之英语段构成的集也是可数集合．

今考虑所有能用有限句英语的语句陈述的十进位小数所组成的集合 E，显然集合 E 的势小于等于可数势，即 $\overline{\overline{E}} \leqslant \aleph_0$，如此，$E$ 的元可排成序列：

$$E: \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \cdots$$

现定义一个十进位小数 θ 如下：“如果 E 中第 n 个小数的第 n 位小数的数字是 p，则规定 θ 的第 n 位小数的数字为 $p+1$，当 $p=9$ 时，则为 0．”（英译为：Let θ be a number defined as follows, if the nth figure in the nth

decimal is p, let the nth figure in θ be $p+1$(or 0, if $p=9$). 因此,θ是一个能用有限句英语语句所陈述的十进位小数,故应有 $\theta \in E$. 但又由 θ 的定义可知 θ 与 E 中每一个十进位小数皆有一有穷差位. 故按有穷差位判别法可知,θ 与 E 中之一切元皆相异,故 $\theta \notin E$,矛盾. 这就是法国人 Richard 于 1905 年所提出的一个语义悖论.

基于所谓"有穷可定义概念"(Dixon,1906)可以构造出与 Richard 悖论相类同的一系列悖论,举二例如下:

例 1 考虑一切能用有限句英语语句陈述的超穷序数的集 L,并简称 L 中之任一元为可定义的超穷序数,显然 $\overline{\overline{L}} = \aleph_0$,但超穷序数却有不可数多,那么不妨称那些不属于 L 的超穷序数为不可定义的超穷序数. 这些不可定义的超穷序数中必有一个最小的,记为 r,于是应有 $r \notin L$. 另一方面,我们就用"the least indefinable ordinal"(最小的不可定义序数)来陈述 r,从而应有 $r \in L$,矛盾.

例 2 由于每个自然数都能用一个英文词或短语去描述它,而每个英文词或短语总是用有限多个英文字母组成的,其中凡重复出现若干次的字母,就按若干个字母计算. 例如,自然数 100 是由 h、u、n、d、r、e、d 等 7 个字母描述的(注意其中字母 d 共出现 2 次,即按 2 个字母计算),当然,自然数 100 还可用诸如"直次于 101 之前的自然数"或"大于 99 的最小自然数"等等英译短语去描述,但在这样那样的描述中,总有一种所用的英文字母最少,特称这种描述为最简描述. 今考虑"一切至多只用 100 个英文字母就能描述的自然数构成的集合 S",可证 S 为有限集合. 事实上,对于每一个空位可有 26 种选择,或者不选,亦即共有 27 种选择. 因之,充其量只有 27^{100} 种可能的描述,就算其中每一种描述都是上述意义下的最简描述,那么由这 27^{100} 种描述也只能描述有限多个自然数. 总之,集合 S 之元的个数必为有限. 令 N 表示全体自然数构成的集合,则 $N-S$ 必为非空集合,记为 M,即 $M = N - S \neq \varnothing$. 于是 M 中必有一最小的自然数 m(良序集之任一子集必有首元),如此,一方面因 $m \in M$ 而知 m 是一个仅用小于或等于 100 个英文字母所不能描述的自然数. 但我们可用下述一句话来描述这个自然数 m,即"用至多 100 个英文字母所不能描述的自然数中的最小自然数."我们再把这句话英译如下:"the least positive integer which cannot be described in at most hundred letters". 只要数一下即知只用了 67 个字母,可见 m 又是一个用少于 100 个字母所能描述的自然数,即 $m \in S$,从而 $m \notin M$,矛盾. 总之,我们用了少于 100 个英文字母去描述了一个少于或等于 100 个字母所不能描述的自然数. 这也是与

Richard 悖论同类型之悖论的又一例.

Grelling 悖论于 1908 年提出,现陈述如下:在我们日常语言中,一个形容词,可按其所描述的性质是否符合于该形容词本身而分为两类,凡是符合的,就称为自状的,凡是不符合的,则称为非自状的. 例如,形容词“中文的”是自状的,因为不仅可以指着任何中文的“书”、“语句”或“词”等说:“这是中文的”,同时也可指着“中文的”三个字说:“这是中文的”,即可用它自身来形容它自身,或者说形容词所形容的性质与它自身相符合,所以它是自状的. 反之,“英文的”却是非自状的,我们能指着“book”说:“这是英文的”,却不能指着“英文的”三个字说:“这是英文的”,因为它明明是中文字,亦即“英文的”这个形容词所描述的性质与它自身不相符合. 又如“字”是自状的,因为它本身也是一个字. 但“圆的”是非自状的,因为它本身不是圆的,而是方块的. 如此,所有的形容词被划分为自状的与非自状的两大类. 但“非自状的”也是个形容词,试问它属于哪一类?若设形容词“非自状的”是非自状的,则正好与它自身相符合,那么按定义,它应该是自状的. 再设“非自状的”是自状的,则正好与它自身不相符合,则它又应该是非自状的,不论哪种说法都说不通,这就是 Grelling 悖论. 又说该悖论是 Grelling 和 Nilsson 共同提出的,故亦称 Grelling Nilsson 悖论.

沈有鼎先生于 1953 年构造并发表了几个著名悖论,这就是所谓“无根据和有根据悖论”、“循环与非循环悖论”、“n 循环与非 n 循环悖论”[33],现用通俗的自然语言将这几个悖论陈述如下:

(1) 无根据和有根据悖论

定义 一集 x 叫做无根据集,如果存在 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 使有

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in x,$$

否则,称 x 为有根据集合.

据上述定义可知,任何一集 G,则 G 要么是有根据集,要么是无根据集.

今按 Cantor 的概括原则,可将所有的有根据集汇集起来构成一个集合,即

$$S=\{x \mid x\text{ 为有根据集}\}.$$

既然 S 为一集,因而也不例外,它要么是有根据集,要么是无根据集,试问 S 是哪一种集合?若设 S 为有根据集,则按 S 的构造或定义可知,任何有根据集都是它的元素,从而必有 $S\in S$,这表明存在 $x_i=S(i=1,2,\cdots)$ 而使有

$$\cdots \in S \in S \in \cdots \in S \in S \in S.$$

按定义可知,S为一无根据集.从而由S为有根据集而可推出它为无根据集,矛盾.

现再设S为无根据集,则按定义可知存在$x_i(i=1,2,\cdots)$而使有

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in S,$$

如此,一方面由$x_1 \in S$和S的定义推知x_1为有根据集,另一方面,可令$X_i = x_{i+1}(i=1,2,\cdots)$,于是存在$X_i(i=1,2,\cdots)$而使有

$$\cdots \in X_n \in X_{n-1} \in \cdots \in X_2 \in X_1 \in x_1,$$

这表明x_1为一无根据集,矛盾.这说明原设S为无根据集一事不能成立,亦即S应为有根据集,如此,又由S为无根据集推出S为有根据集.还是矛盾.不论何说都说不通,故为一悖论,人们称之为"无根据与有根据悖论".[33]

(2)循环与非循环悖论

定义 一个集合x叫做循环集,如果存在$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$(n为不固定的任一正整数变量)使有$x \in x_1 \in x_2 \in x_3 \in \cdots \in x_n \in x$,否则称$x$为非循环集.

根据上述定义,任给一集G,则G要么是非循环集,要么是循环集.今按Cantor的概括原则,可将所有的非循环集汇集起来构成一集.亦即

$$S = \{x \mid x\text{为一非循环集}\}.$$

既然S为一集,因而可以问S是循环集还是非循环集.

若设S为一循环集,则必存在$x_1,x_2,\cdots,x_n$而使有

$$S \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in S,$$

于是由$x_n \in S$可知x_n为一非循环集(因为S的任一元均为非循环集),但另一方面,我们可有

$$x_n \in S \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_{n-1} \in x_n,$$

由定义而知x_n实为一循环集,矛盾.这表明原设S为循环集不能成立,即S应为一非循环集.也可以这样说,由设S为循环集而可推出S为非循环集.

现再设S为一非循环集,则由S的定义可知,任何非循环集都是S的元素,故有$S \in S$,于是存在$x_i = S(i=1,2,\cdots,n)$而使有

$$S \in S \in \cdots \in S \in S,$$

这表明S为一循环集,从而由设S为非循环集而推出S为循环集.哪种说法都不能自圆其说,故为一悖论.通常叫做"循环与非循环悖论".[33]

(3)n循环与非n循环悖论

定义 一集 x 是 n 循环集，如果存在某一固定的正整数 n 和 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 使有

$$x \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_{n-1} \in x_n \in x,$$

否则称 x 为非 n 循环集.

类似于“循环与非循环悖论”的讨论，用 Cantor 的概括原则构造集合

$$S=\{x \mid x \text{ 为非 } n \text{ 循环集}\}.$$

然后问 S 是 n 循环集，还是非 n 循环集，就将导致悖论，读者可自行分析讨论之. 人们称之为“n 循环与非 n 循环悖论”.[33]

显然，n 循环集不过是循环集之一种特殊情形；另一方面，若设 x_1 为一循环集，则利用 $x_n \in x_1$，可使该循环无限制地重复下去，以使有

$$\cdots \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n \in x_1,$$

于是 x_1 便是无根据集，如此可知，循环又是无根据的特殊情形，若引进符号 $\Subset$ 定义如下：

○○○○○ $\Subset$ △△△△△△ $=_{df}$ ○○○○○ 为 △△△△△△ 的特殊情形.

则我们有：

n 循环 $\Subset$ 循环 $\Subset$ 无根据.

同时又易见如下情形为真：

(a) n 循环 $\Subset$ $2n$ 循环 $\Subset$ $4n$ 循环 $\Subset$ 2^n 循环，

(b) n 循环 $\Subset$ $3n$ 循环，n 循环 $\Subset$ $m \cdot n$ 循环，

(c) 1 循环 $\Subset$ n 循环 $\Subset$ 循环 $\Subset$ 无根据.

现在，让我们把 Russell 悖论和沈有鼎三悖论的造集谓词及其所构造之集合列出如下：

(1) $\{x \mid x \notin x\}$，

(2) $\{x \mid x$ 为非 n 循环集$\}$，

(3) $\{x \mid x$ 为非循环集$\}$，

(4) $\{x \mid x$ 为有根据集$\}$.

其中 Russell 悖论的造集谓词实可为非 1 循环集，因为 1 循环就是 $x \in x$，非 1 循环就是 $\neg(x \in x)$，即 $x \notin x$，即非本身分子集. 又如“无根据与有根据悖论”的造集谓词是有根据集. 而据定义知，有根据集即指不存在下述 $\in$ 关系的无穷串

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in x.$$

所以有根据集也可谓“非 $\in$ 关系无穷串”. 综上所论，不难看出，沈有鼎三悖论实为 Russell 悖论的逐级推广，亦即把 Russell 悖论的造集谓词非

1 循环集，分别扩张为非 n 循环、非循环和非 $\in$ 关系无穷串，这些造集谓词，将在本书第 3 章中再次论及. 总之，可以认为沈有鼎先生所构造之三种著名悖论，本质上是著名的 Russell 悖论的变形.

2.5 非欧几何与数学基础问题

在非欧几何获致普遍接受及其相对相容性得到证明之前的很长历史阶段中，人们几乎确信数学真理就是绝对真理，例如，本书 1.2 节中就曾论及 Kant，他把 Euclid 几何看成是关于空间的绝对真理，即所谓先验的综合判断. 而且与 Kant 同时代的学者，几乎全都同意他的观点. 然而，自从 Poincaré 在 Euclid 空间中构造出 Лобачевский 几何模型（详见本书 1.6 节）之后，特别是本书 1.7 节之末尾所提及的，人们又发现 Euclid 几何的每条公理能在 Лобачевский 几何的一些特殊曲面上成立（对此，有兴趣的读者可参阅文献[5]中 4.2 节），这表明我们也能在 Лобачевский 几何空间中构造出 Euclid 几何模型，从而可以认为两种几何是互为相对相容的. 这样，平行公理完全相悖的两种几何竟然是互为相容的，这就直接否定了上述"数学真理是绝对真理"的观点，人们感到"至少是部分地矛盾的几何居然都能用来描述物理空间，我们真不知道，对于物理空间来说，究竟哪一种是真实的了. "[17] 从而在部分数学家那里，竟导致了对于数学真理性的否定而走向了相对主义.

此外，正如 2.3 节中所指出的，由于集合论中悖论的出现，特别是 Russell 悖论的出现，震动了整个西方数学界和逻辑学界，以致德国数学大师 Hilbert 指出："必须承认，由于悖论的出现而造成的形势是难以忍受的，只要设想一下，每个人曾经学过、教过并在数学中加以应用的定义和演绎方法，从来都被认为是真理和必然的典范，而现在却导致了荒谬，如果连数学思维都是不可靠的，那么到何处还能找到真理和必然性呢？"[34]

数学是演绎推理性质的学科，所以从形式上看，数学命题的真理性是建立在公理的真理性和逻辑规则的有效性之上的，本来即使在上述"数学真理是绝对真理"这一观念受到冲击之后，数学家还可以用逻辑推理的严格性来作为精神支柱，并以此解释数学在应用中的有效性，但由于悖论的出现，这一精神支柱也动摇了. 这就不能不在数学家中形成危机感.

正因为数学面临着这样的危机，才促使数学家们去探索数学推理在

什么情况下有效，什么情况下无效，数学命题在怎样的情况下具有真理性，在怎样的情况下失灵. 于是，在20世纪初，数学基础论这一分科就诞生了. 摆在从事数学基础问题研究的数学家面前的首要任务，就是如何为数学的有效性重新建立可靠的依据. 由于在这一工作中所持的基本观点不同，才在数学基础论的研究中形成了各个流派. 所以这也正是形成数学基础诸流派的共同的历史背景. 当然，诸流派的形成还有它们各自具体的历史近因，我们将在下文中分别讨论诸流派之观点和方法时再作讨论.

应当指出，所说之数学基础诸流派，就是通常所说的数理逻辑三大派（逻辑主义派、直觉主义派、形式主义派），其实称之曰数理逻辑三大派并不恰当，“因为他们是因数学基础的研究而产生的，所提出的见解多数是针对数学基础论中之问题而研究出来的，而三派的形成及其分歧，亦是因数学基础问题而来的. 所以实际上应该说数学基础论的三派.”[2] 那么，我们又为何要称其为诸流派而不称之谓三大派呢？因为我们将在本书下文中，按照历史的本来面目明确划分 Hilbert 主义派和形式主义派，并由此而澄清那种把形式主义与 Hilbert 主义混为一谈的不正确说法.

其次，我们曾在本书1.6节之末尾提及如下情况，即人们首先把 Лобачевский 几何公理系统的无矛盾性归约到 Euclid 几何公理系统的相容性，进而又把 Euclid 几何公理系统的相容性归约到实数系统的无矛盾性. 而实数系统的无矛盾性又如何？数学分析中的实数理论告诉我们，Dedekind 把实数定义为有理数的分划，因而这个无矛盾性又被归约到了自然数系统的无矛盾性. 那么自然数系统的相容性又如何？由于 Dedekind 和 Frege 的自然数概念是借助于集合概念加以定义的，所以要建立严格的实数理论，又必须以集合论为基础，因此自然数系统的相容性又被归约到了集合论的无矛盾性. 那么集合论的相容性又如何？正如2.3节中所论，集合论的相容性正处于严重的危机中，从而这种危机不解决，那么刚才所说的一系列相对相容性证明就要全部落空. 为之，各家提出各家解决悖论的不同方案，各派提出各派解脱危机的主张. 例如，“Hilbert 认为，我们不应该老是搞相对相容性证明，而应该搞直接的相容性证明.”[2] 如此等等. 那么各家的方案和各派的主张的具体内容如何？结果又如何？我们将在本书之下属两章中分析讨论.

第 3 章　逻辑数学悖论在精确性经典数学中的解释方法

3.1　Zermelo 对悖论的解释方法

应当指出:"Russell 对于悖论的研究很有贡献,这是许多数学家和逻辑学家公认的,虽然他的理论在实践上造成很大的困难,但现有的一些解决悖论的方法,无不渊源于 Russell 早年提出的见解"[35]. 因为 Russell 是从本质上,而不是从个别技术性细节上来分析悖论的,亦即"Russell 把 Cantor 集合论所导致的悖论剥去了一切数学上技术性的枝节,从而揭示了这样一个惊人的事实,即我们的逻辑直觉(诸如关于真理、概念、存在、集合的直觉)是自我矛盾的."[36] Russell 认为:"一个集合可以用两种方法予以定义,我们可以枚举它的元素,…,也可以指明它的性质,…,那种枚举式的定义称为外延性的定义,而那种指明性质的定义方法称为内涵式的定义."[37] 基于这样一种考虑问题的准则,寻找出路的办法有两条道路可走,这就是 Russell 当年所指出的几个可能方向中的被称之曰"量性限制理论"和"曲折理论"这样两个方向,更确切地可称之为"外延理论"和"内涵理论". 对于 Russell 指出的曲折理论,后来在 Quine 的工作中得到了阐发,至于量性限制理论,其"最主要的特性就是对于全集或无限之关于某种现象的概念的存在性加以限制,后来由 Zermelo 和其他人所发展起来的公理化集合论,就可以看成是对这一思想的阐发."[36] 此外,随着悖论的出现和研究,人们也曾考虑过,既然作为整个经典数学之理论基础的集合论是自相矛盾的,那么能否干脆把那个矛盾百出的古典集合论抛弃掉,设法为数学寻找别的理论作为它的基础,但经探索研究,发觉这样做实在太难了. 还不如立足于改造古典集合论,使之能以自圆其说. 因而大家又致力于改造古典集合论了. 迄至目前为止,归纳起来,"改造的方案主要有二:一是 Russell 的类型论,二是 Zermelo 的公理集合论."[23] 关于 Russell 的类型论,我们将在下一节讨论,在本节我们将分析讨论 Zermelo 等人沿着 Russell 指出的量性限制论那个方向所

展开的工作和思想方法.

自 Russell 悖论出现以后，Zermelo 想借助于他所说的"划分公理"（也称分出公理或子集公理）来排除它（或说给出解释方法），至于该法是否有效，尚要看他的具体做法再作定论.

划分公理 任给一集 L 和一性质 p，则集合 L 中一切满足性质 p 的元素可以汇集起来构成一集 Γ，即 $\Gamma=\{x \mid x \in L \& p(x)\}$ 为一集合.

此处的性质 p，当然是 Cantor 意义下能以用来造集的精确性质，即一元谓词. 对此，请参阅本书 2.1 节中关于概括原则之讨论的相关内容.

根据划分公理，可证下述定理为真.

定理 任给一集 L，必有 L 的一个子集 Γ，它不是 L 的元素，即总有 $\Gamma \subseteq L \& \Gamma \notin L$.

证明 设 L 为任给的一个集合，又令 $x \notin x$ 为上述划分公理中所说的性质 p，则由上述划分公理可知 $\Gamma=\{x \mid x \in L \& x \notin x\}$ 为一集，显然，Γ 为 L 的一个子集，现证 Γ 不是 L 的一个元素，即要证 $\Gamma \notin L$. 否则，若设 $\Gamma \in L$，即 Γ 为 L 的一个元素. 由于集合 L 中的任何元素，要么具有性质 $x \notin x$，要么不具有性质 $x \notin x$，从而具有性质 $x \in x$，无一例外，现既已设定 $\Gamma \in L$，则 Γ 也不例外，它要么具有性质 $x \notin x$，即 Γ 为一非本身分子集，即有 $\Gamma \notin \Gamma$，要么 Γ 具有性质 $x \in x$，即 Γ 为一本身分子集，即有 $\Gamma \in \Gamma$.

我们先设 Γ 有性质 $x \notin x$，又因我们假设有 $\Gamma \in L$，故 Γ 具有性质 $x \in L \& x \notin x$. 根据 Γ 的构造可知 Γ 为 Γ 的一个元素，从而 $\Gamma \in \Gamma$，即 Γ 具有性质 $x \in x$，矛盾.

我们再设 Γ 具有性质 $x \in x$，即 $\Gamma \in \Gamma$，故 Γ 为 Γ 的一个元素，但因 Γ 的每一元素均有性质 $x \in L \& x \notin x$，故作为 Γ 之元素的 Γ 也不例外，亦应具有性质 $x \in L \& x \notin x$，故 Γ 有性质 $x \notin x$，又矛盾.

总之，在原设 $\Gamma \in L$ 的前提下，哪种说法都导致矛盾. 故原设不能成立. 故 Γ 不是 L 的元素. □

有了上述定理，即可证明 Russell 悖论中的那个"一切非本身分子集的'集'Σ"不是一个集合. 否则，若设 $\Sigma=\{x \mid x \notin x\}$ 为一集合. 则由定理可知，Σ 必有一子集 Γ 不是 Σ 的元素，亦即应有

$$(*) \qquad \Gamma \subset \Sigma \& \Gamma \notin \Sigma.$$

既然 Σ 为一集合，Γ 又是它的子集，于是应承认 Γ 是一个集合，从而可问 Γ 是本身分子集，还是非本身分子集. 若设 Γ 为本身分子集，则有 $\Gamma \in \Gamma$，但因 $\Gamma \subseteq \Sigma$，故推知 $\Gamma \in \Sigma$，矛盾于上述（$*$）. 再设 Γ 为非本身分子集，则因 Σ 为一切非本身分子集汇集起来构成的集合，从而 Γ 必为 Σ 的一个元

素，故$\Gamma \in \Sigma$，又矛盾于上述（*），总之哪种说法都导致矛盾，这表示原设$\Sigma = \{x \mid x \notin x\}$为集合一事不能成立. 从而$\Sigma$不是集合.

既然$\Sigma = \{x \mid x \notin x\}$根本不是集合，那也不能问$\Sigma$是本身分子集还是非本身分子集，从而也就谈不上Russell悖论的出现和存在了.

这样一来，从表面上看，似乎只要承认划分公理，Russell悖论就能排除，或者说就能给出Russell悖论的一种解释方法，其实不是这样简单. 人们要问，划分公理是和那些原始概念、推理原则和基本原理结合起来进行推理的. 否则，仅由一条划分公理，不要说进行推理，连它自身的陈述也不可能. 所以"只要承认划分公理，便可给出Russell悖论的解释方法，或者就能排除Russell悖论"这种孤立的说法，不只是粗糙的，几乎可以说是错误的. 实际上，必须配以一整套的原始概念和推理原则，亦即要有一个公理系统，其中包括划分公理在内，我们能够证明Russell悖论不在这个系统中出现.

现在，让我们考虑一下概括原则与划分公理之间的关系，显然，Zermelo的划分公理不过是Cantor之概括原则的一个简单的推论，因为只要承认概括原则，我们可将划分公理中构造Γ的$x \in L \& p(x)$视为一个整体，并看成是概括原则用以造集的某种性质p，那么就得承认

$$\Gamma = \{x \mid x \in L \& p(x)\}$$

为一集合. 所以，在承认概括原则的前提下，那个所谓划分公理便自然成立，无需作为公理引入. 但是反过来是不一样的，概括原则决不是划分公理的推论，因为划分公理必须预先设定存在一个集合L为前提，概括原则造集却没有这种要求.

这样一来，如果我们从承认概括原则这个前提出发，一方面由概括原则直接推知Russell悖论中的那个$\Sigma = \{x \mid x \notin x\}$为一集合，另一方面却又由概括原则而推出那个划分公理，从而由上文所论而推知那个$\Sigma = \{x \mid x \notin x\}$根本不是集合. 这表明从概括原则这个前提出发，既可以推出A，又能推出$\neg$A，由此而普遍怀疑，这个概括原则本身就是自相矛盾的，自然就是导致悖论的祸根了.

再举一例，一方面由概括原则可导出划分公理，又由此而可证明"任一集合必有一子集不是它的元素". 从而又可有下面的结论：

（*）Cantor悖论中的那个$E = \{x \mid x$为一集$\}$不是集合.

否则，若设E为一集，则E必有一子集Γ不是E的元素. 但既然已设E为一集，那么E的子集Γ当然也是一个集合，那么按照E的定义与构造，必有$\Gamma \in E$，这就矛盾于Γ不是E的元素了. 所以这个E不是集合.

另一方面，由概括原则和令“集合”为造集的性质 p，必有结论：

(*)′ Cantor 悖论中的那个 $E=\{x \mid x \text{ 为一集}\}$ 是一个集合.

如此，由概括原则这个前提出发，又推出了互相矛盾的(*)和(*)′这样两个具体的结论，矛盾的焦点再次集中到概括原则这个 Cantor 用以造集的思想方法上去了. 然而问题究竟出在什么地方，似乎又突出地表现在“一切集合汇集在一起”或者“一切非本身分子集汇集在一起”究竟能不能构成集合这样一个问题，致使大家进一步认为：概括原则所肯定的那种造集的任意性似应加以适当的限制. 不论如何，概括原则是导致悖论的祸根，应当把它抛弃或修改，乃是进一步深入人心了.

但在这里，我们却要郑重提出一点异议，固然如上文所论，由概括原则这个前提出发，能以推出 A 和¬A 两个互相矛盾的命题. 以致普遍怀疑概括原则本身可能有问题，如果只是怀疑，则不仅可以理解，甚至是无可非议的. 但若由此结论，一定是概括原则这个思想方法的问题，它无疑是导致悖论的祸根，那就不是无可非议，而是可以提出异议了，即使如下文将要论及的那样，立足于修改概括原则而去给出悖论的解释方法已经取得一定成效的情况下，还是可以提出异议的. 因为虽说从概括原则这一前提出发，推出了互相矛盾的结论. 但若孤立地只有一条概括原则，能进行推理吗？从概括原则到矛盾命题的出现，不仅是一个过程，而且需要一整套的基本概念和推理原则与之配套并进行推理，如此推出了矛盾，就一定只能是概括原则的问题，为什么不可能是与之配套的某个别的推理原则出了问题，或者也可能是概括原则与某几个其他配套原则都有些问题，总之，仅由前文所论而把导致悖论的责任完全归结到概括原则有问题的根据并不充分，对此，我们认为还是可以考虑，并值得再作探索与研究的. 当然，对于本书而言，这不过是一段题外之言而已.

现在，还是让我们言归正文. 后来，Zermelo 首先构造公理系统，在限制概括原则之造集的任意性原则下，形成了一个没有概括原则，但包括划分公理在内的集合论公理系统. 在该系统内，只承认按系统中公理所允许的限度内构造出来的集才是系统中的集合，否则，当造集依据超出系统中各公理所要求的限度时，就不承认它是系统中的集合. 该系统能对历史上既经出现的二值逻辑数学悖论给出解释方法，即它们不会在系统内出现.

Zermelo 于 1908 年建立了他的集合论公理系统后，几经改进. 最后由 Fraenkel 与 Skolem 在 1921～1923 年间给出了一个严格的解释，进而形成著名的 ZF 系统，ZF 系统是承认选择公理的，通常也写成 ZFC 系统，

其中英文字母 C 表示该系统接受选择公理.

如所知，我们曾在文献[8]中讨论过经典二值逻辑的命题演算系统和谓词演算系统. ZFC 系统是以二值逻辑演算系统为其配套之逻辑工具的. 在这里，我们对 ZFC 系统的形式语言与逻辑演算的公理、推理规则等就略而不叙了，但将该系统的各个非逻辑公理作一介绍，借以对这一系统的基本面貌有一概略的了解. 最后还要对 ZF 系统作一简短的一般性评述.

关于 ZFC 系统的陈述有许多版本，在这里，我们采用 Herbert B. Enderton 所著的《Elements of Set Theory》一书中的陈述形式，在该书之末所附的公理表中，包括了外延、空集、配对、并集、幂集、子集(即划分)、无穷、选择、替换、正则等 10 条非逻辑公理. 我们将按这些公理在该书中的出处一一笔录，有的再写出其另外通用的表达式，但特别重要的是给出这些公理的自然语言的素朴解释.[38]

外延公理　$\forall A \forall B[\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \to A = B]$

该公理说，如果两个集合有完全相同的元素，则它们相等.

空集公理　$\exists \varnothing \forall x\, x \notin \varnothing$

通常也表达为　$\exists \varnothing \forall x\,(x \notin \varnothing)$

该公理表示无条件地承认存在一个不含任何元素的集合，即存在一个集合，任何对象都不是它的元素.

对偶公理　$\forall u \forall v \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x = u \text{ or } x = v)$

该公理指出，对于任何集合 u 与 v，总存在一个集合，恰以 u 与 v 为它的元素.

并集公理(初级形式) $\forall a \forall b \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in a \text{ or } x \in b)$

该公理认为，对任何两个集合 a 和 b，存在一个集合，它的元素或者属于 a，或者属于 b，或者属于两者.

幂集公理　$\forall a \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \subset a)$

该公理指出，对任意集合 a，存在一个集合，它的元素恰好是 a 的一切子集. 当然，这里的 $x \subset a$ 还可表达为 $\forall t(t \in x \Rightarrow t \in a)$.

子集公理　对每一个不包含 B 的公式____，如下的表达式是公理.

$$\forall t_1 \cdots \forall t_k \forall C \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in C \,\&\, ____)$$

若用自然语言叙述，这个公理断言(对任意 $t_1, \cdots, t_k$ 和 C)存在这样的一个集合 B，其元素正好是 C 中所有使得那个不包含 B 的公式____成立的那些元素 x. 于是，自然得出 B 是 C 的子集(子集公理之名由此而来). 集合 B 被($t_1, \cdots, t_k$ 和 C)唯一确定. 并可用抽象记号的变形 $B = \{x \in C \mid ____\}$ 来给它命名，子集公理也叫做划分公理或分出公理.

并集公理(高级形式)

$$\forall x[x \in B \Leftrightarrow (\exists b \in A)x \in b]$$

通常也表达为

$$\forall A \exists B \forall x[x \in B \Leftrightarrow \exists b(b \in A \& x \in b)]$$

该公理说,对任意集合 A,存在一个集合 B,它的元素正好是 A 的元素的元素全体.

定义 对任何集合 a,它的后继 a^+ 定义为

$$a^+ = a \cup \{a\}$$

定义 如果集合 A 满足如下条件:

1. $\varnothing \in A$,

2. $\forall a(a \in A \Rightarrow a^+ \in A)$,

则称该集 A 为一归纳集.其中条件 2 也叫做集合 A 在后继下封闭,即对每个 $a \in A$,总是 $a^+ \in A$,亦即如果 a 是 A 的元素,则 a 的后继 a^+ 也必为 A 的元素.

虽然我们还没给出"无限"的形式定义,但实际上已经看到,任何一个归纳集将是无限的.但我们至今还没有提供无限集的存在性公理,同时也无法证明任何归纳集的存在.我们将以公理的形式来保证归纳集的存在.

无穷公理 $(\exists A)\varnothing \in A \& [\forall a \in A \Rightarrow a^+ \in A]$

通常也表达为

$$\exists A(\varnothing \in A \& \forall a(a \in A \Rightarrow a^+ \in A)).$$

该公理指的是无条件承认归纳集的存在.

选择公理 $\forall \mathscr{A}(\mathscr{A} \neq \varnothing \& \forall a(a \in \mathscr{A}$

$\Rightarrow a \neq \varnothing) \& \forall a \forall b(a \in \mathscr{A} \& b \in \mathscr{A} \& a \neq b$

$\Rightarrow a \cap b \neq \varnothing) \Rightarrow \exists B(x \in B$

$\Rightarrow \exists b(b \in \mathscr{A} \& x \in b \& b \cap B = \{x\})))$

该公理说,设 $\mathscr{A}$ 是这样一种集合:(a)$\mathscr{A}$ 是非空集合,并且 $\mathscr{A}$ 的每个元素都是非空集合,(b)$\mathscr{A}$ 的任何两个不同的元素不相交.那么存在一个集合 B,恰以 $\mathscr{A}$ 的每个元素中的一个元素的全体构成(即对每个 $b \in \mathscr{A}$,$b \cap B$ 是某个 x 的单元集 $\{x\}$).

关于选择公理,有多种等价形式,文献[9]6.5 节对此作了专门的分析讨论,有兴趣的读者不妨参阅之.

替换公理 $\forall A[(\forall x \in A)\forall y_1 \forall y_2(\varphi(x,y_1)\&\varphi(x,y_2)$

$\Rightarrow y_1 = y_2) \Rightarrow \exists B \forall y(y \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x,y))]$

通常也表达为

$$\forall A[\forall x \forall y_1 \forall y_2(x \in A \& \varphi(x, y_1) \& \varphi(x, y_2)$$
$$\rightarrow y_1 \Rightarrow y_2) \rightarrow \exists B \forall y(y \in B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \& \varphi(x, y)))]$$

此处应注意，B 不在公式 $\varphi(x,y)$ 中出现.

现将替换公理译成自然语言：我们把公式 $\varphi(x,y)$ 读为“x 提名 y”，则该公理的前提说：“任给集合 A，A 的每个元素至多提名一个对象.”① 而该公理的结论是说：“所有被集合 A 之元素所提名的那些对象可以汇集起来构成一个集合 B.”公理之名称“替换”反映了集合 A 中的每个元 x，由它的被提名者（如果有的话）所代替而产生了集合 B 这样一种思想.

正则公理 $(\forall A \neq \varnothing)(\exists m \in A) m \cap A = \varnothing$

也可表达为 $\forall A(A \neq \varnothing \rightarrow \exists m(m \in A \& m \cap A = \varnothing))$

该公理说，每个非空集合 A，至少有一个元素 m，使得 m 与 A 没有公共元素.

从上述 ZFC 系统的这些非逻辑公理的内容来看，Zermelo-Fraenkel 构造 ZFC 系统的思路和中心目标，仍在于为分析学奠定严格的基础，如前文所述，微积分的基础，通过 Cauchy 到 Dedekind 归约到了实数论，而实数论的不矛盾性又归约于集合论的不矛盾性. 那么 ZFC 系统按如下路线去为微积分奠基，这就是由无穷公理来保证自然数集合的合法性（对此，读者可参阅文献[9]4.1 节，在那里，详细讨论了如何从集合论概念出发，用构造性方法去建立自然数系统等），再由幂集公理导致实数集的合法化，然后再由子集公理来保证实数集中满足性质 p 的元素所组成之子集的合法性，这样一来，只要 ZFC 系统无矛盾，严格的微积分理论，就能在 ZFC 公理集合论上建立起来了. 但是，问题在于 ZFC 系统本身的无矛盾性至今没有被证明，因而不能保证该系统今后一定不出现新的悖论. 当然，对于历史上既经出现的种种二值逻辑数学悖论都能在 ZFC 系统中给出解释方法，亦即这些悖论不在其中出现，而且 ZFC 系统一直展开到今天，也没有发现新的矛盾. 尽管如此，Poincaré 指出：我们设置栅栏，把羊群围住，免受狼的侵袭，但也很可能在围栅栏时，就已经有一条披着羊皮的狼被围在其中了. 所以怎能保证今后一定不出问题呢？总之，Zermelo 的解释方法或避免悖论的方案，应该说取得了相当大的成效，然而不仅没有彻底解决问题，而且还有其他遗留问题，例如，对概括原则的限制过多，在避免悖论的同时，失去了诸多合理内容等，因而难以令人满意.

---

① 此处 $\forall x \forall y_1 \forall y_2(x \in A \& \varphi(x, y_1) \& \varphi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2)$ 叫做集合 A 是单值的.

现在让我们来讨论沈有鼎先生所构造之三个著名悖论在 ZFC 系统中的解释方法. 正如 2.4 节所指出的那样，沈有鼎三悖论实际上仍然是 Russell 悖论的变形，因而在论及避免沈有鼎三悖论的同时，势必还会再论 Russell 悖论的解释方法. 为了实现如上所说的目标，还要先作一番准备. 在这里，我们要从正则公理的几种等价形式谈起，在 ZFC 系统中的正则公理，有下述三种不同的陈述形式：

AxR：每个非空集合 A 有元素 x，使得 $x \cap A = \varnothing$，亦即

$$\forall a(a \neq \varnothing \rightarrow \exists x(x \in a \& x \cap a = \varnothing)).$$

AxR'：每个非空集合 A 都有 $\in$ 关系的最小元，亦即 $\in$ 关系是良基的.

AxR''：不存在 $\in$ 关系的无穷串：

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_3 \in x_2 \in x_1.$$

我们将会证明如上三个陈述 AxR、AxR'、AxR'' 是互相等价的，亦即有下述定理.

定理 1 在 ZFC 系统中，AxR、AxR'、AxR'' 三者是互相等价的，即可证明：

$$AxR \Rightarrow AxR' \Rightarrow AxR'' \Rightarrow AxR.$$

证明 现分三步证明之.

(1) $AxR \Rightarrow AxR'$

我们用反证法证之. 为之，反设 AxR' 不真，即存在一非空集合 A，即 $A \neq \varnothing$，并且在 A 中没有 $\in$ 关系最小元，因此，对任一 $x \in A$，总存在 $y \in A \& y \in x$，故 $y \in x \cap A$，这表示对于 $A \neq \varnothing$ 的任何元素 x，总有 $x \cap A \neq \varnothing$，从而矛盾于前提 AxR. 故原设不成立，亦即 AxR' 成立.

(2) $AxR' \Rightarrow AxR''$

同样可用反证法证明之. 我们反设在 ZFC 系统中存在 $\in$ 关系的无穷串：

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_3 \in x_2 \in x_1.$$

则由 ZFC 系统中的无穷公理和替换公理可构造集合

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

如此，对于上述非空集合 A 中的任一元素 x_i，必有 $x_{i+1} \in A \& x_{i+1} \in x_i$，从而我们在 ZFC 中构造了一个非空集合 A，在 A 中没有 $\in$ 关系的最小元，从而又矛盾于前提 AxR'，故原设不真，从而 AxR'' 成立.

(3) $AxR'' \Rightarrow AxR$

否则，若设 AxR 不成立，亦即存在一个非空集合 A，对于 A 的每个元素 x，总有 $x \cap A \neq \varnothing$. 从而可从 A 中任取一元 x_1，因为 $x_1 \cap A \neq \varnothing$，故有 x_2 使有 $x_2 \in x_1 \cap A$，又因 $x_2 \in A$，故 $x_2 \cap A \neq \varnothing$，故又有 x_3 使有

$x_3 \in x_2 \cap A$，如此又因 $x_3 \in A$ 而有 $x_3 \cap A \neq \varnothing$，于是又可有 $x_4 \in x_3 \cap A$ 等，以此类推下去，永无止境，从而又有 $\in$ 关系无穷串：

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_4 \in x_3 \in x_2 \in x_1.$$

这就矛盾于前提 AxR''，故原设不能成立，亦即 AxR 为真.

综合所论，我们证明了 $AxR \Rightarrow AxR' \Rightarrow AxR'' \Rightarrow AxR$. 所以 AxR、AxR'、AxR'' 在 ZFC 系统中是互相等价的. □

读者可能对上述定理1中关于 $AxR'' \Rightarrow AxR$ 之证明过程会提出如下疑问，即证明中所设的那个非空集合 A 似乎必须是无穷集合了，因为在那里总要有 A 的元素 $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n, \cdots$，但是非空集合未必一定要是无穷集合，因而对此质疑该说言之有理，这表示还应在假设有非空有穷集合 A_0 的情况下，由 AxR'' 去证明 AxR 为真，不妨建议读者在 AxR'' 前提下，设有非空有限集 A_0，例如 $A_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$，必有某个 $x_i (i = 1,2,3)$ 使有 $x_i \cap A_0 = \varnothing$，即要证 AxR 对此 $A_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$ 也成立. 当然，读者也可反设 $x_i \cap A_0 \neq \varnothing (i = 1,2,3)$ 而导致 $\in$ 关系无穷串的出现，从而矛盾于前提 AxR''，并由此而完成证明，其中应注意本书2.4节中论及沈氏二悖论之后，所指出的 n 循环和循环都是无根据的特殊情形.

定理2 ZFC 系统中不存在这样的集合 X，能使有 $\mathscr{P}(X) \subseteq X$，其中 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 的幂集.

证明 现反设 ZFC 系统中有集合 X，能使有 $\mathscr{P}(X) \subseteq X$，则由 ZFC 系统中的子集公理，可构造集合

$$S = \{x \mid x \in X \,\&\, x \notin x\}.$$

显然，$S \subseteq X$，故 $S \in \mathscr{P}(X)$，但因设 $\mathscr{P}(X) \subseteq X$，故有

$$(*) \qquad S \in X.$$

现问集合 S 具有性质 $x \in x$，还是具有性质 $x \notin x$. 先设 S 具有性质 $x \in x$，即 S 为一本身分子集，即 $S \in S$，故 S 应具有性质 $x \in X \,\&\, x \notin x$，从而 S 具有性质 $x \notin x$，矛盾. 再设 S 具有性质 $x \notin x$，即 S 为一非本身分子集，即 $S \notin S$，于是联合上述(*)，即有 $S \in X \,\&\, S \notin S$，这表明 S 这个集合具有性质 $x \in X \,\&\, x \notin x$，从而应有 $S \in S$，即 S 具有性质 $x \in x$，又矛盾. 故不论何说都矛盾，所以一开头的反设不能成立，故在 ZFC 系统中，不存在这样的集合 X，能使有 $\mathscr{P}(X) \subseteq X$.

定理3 由一切 ZFC 系统中的集合汇集起来的总体不是 ZFC 系统中的集合，亦即

$$E = \{x \mid x \text{ 为 ZFC 的集}\}$$

不是 ZFC 系统的集合.

证明 现反设 $E=\{x \mid x$ 为 ZFC 的集$\}$ 为 ZF 系统中的集合，则由 ZFC 系统中的幂集公理可知，E 的幂集有 $\mathscr{P}(E)$ 仍为 ZFC 系统中的集合. 但在另一方面，若设 $x \in \mathscr{P}(E)$，则 x 为 E 的一个子集，从而 x 亦为 ZFC 的集合，又由 E 的构造知 $x \in E$，所以 $\mathscr{P}(E) \subseteq E$，矛盾于定理 2，故原设不真，故 E 不是 ZFC 的集. □

由上述定理 1 可直接推知下列结论均为真：

(1) ZFC 系统中任何集合都是有根据集合，否则将矛盾于正则公理的等价命题 AxR''.

(2) ZFC 系统中的任何集都是非循集，因为已知循环⋐无根据，从而又将矛盾于 AxR''.

(3) ZFC 系统中之任何集合都是非 n 循环集，因为已知 n 循环⋐循环⋐无根据，还是要导致矛盾于 AxR''.

(4) ZFC 系统中之任何集都是非本身分子集. 否则若设 ZFC 系统中存在本身分子集 x，则有 $x \in x$，即 x 为 1 循环，从而又将导致 $\in$ 关系的无穷串的出现而矛盾于 AxR''，或者也可由

$$1\text{ 循环} \Subset n\text{ 循环} \Subset \text{循环} \Subset \text{无根据}$$

而知矛盾于 AxR''.

根据如上结论(1)～(4)推知下列总体都不是 ZFC 系统中的集合，这些总体依次是：

1. $\{x \mid x$ 为有根据集$\}$，
2. $\{x \mid x$ 为非循环集$\}$，
3. $\{x \mid x$ 为非 n 循环集$\}$，
4. $\{x \mid x$ 为非本身分子集$\}$.

基于上述 1～4 都不是 ZFC 系统中的集合，当可结论沈氏三悖论和 Russell 悖论在 ZFC 系统中均不会出现，或说被排除，或说给出了解释方法.

3.2 Russell-Ramsey 对悖论的解释方法

关于悖论的成因，Poincaré 曾在 1905、1906、1908 年多次指出：所有悖论都和非直谓定义有关. 所谓非直谓定义，就是"被定义的对象被包括在借以定义它的各个对象中". 或者说："借助于一个总体来定义一个概念，而这个概念本身又属于这一总体". 虽然 Gödel 曾指出："通过对悖论的分析，Russell 早在 1903 年得出了这样的结论，认为构成悖论的原因，

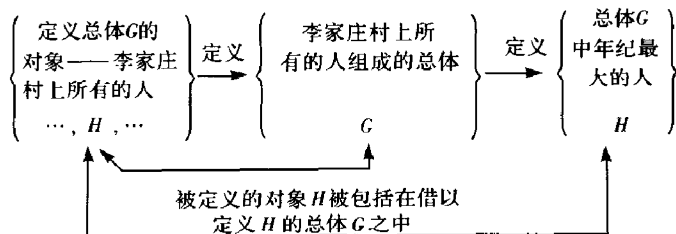
在于那个对任一命题函项都存在有一个对应的集合来满足它的假定，亦就是说，对于Cantor的概括原则中的那种造集的任意性要拒绝，即要拒绝那种一般意义下的集合的存在性．”[36] 正如3.1节所论之Zermelo对悖论的解释方法那样，不仅立足于修改概括原则之造集的任意性，发展了Russell当年提出的量性限制论，而且在排除悖论之事上取得了相当大的成效．但是，Russell自己在解决悖论的征途上，却没有沿着上述这个由他自己所指出的方向去努力，而是把自己的工作立足于对悖论的更为一般的分析上，那就是对上面所说之非直谓定义法的分析．鉴于这种分析探索，Russell进一步明确了上文所说之Poincaré关于悖论成因的想法，那就是所有这些悖论，都有这样一个关键性的对象，它借助于一个整体予以定义和刻画，但这一对象却又被包含在这一整体之中，在这里出现了一种循环，而正是由于这种循环导致悖论的出现，因此，构成悖论的深刻原因与非直谓定义有关，我们将通过举例来进一步阐明所谓非直谓定义的具体含义，并将种种非直谓定义法加以分类．

例1 全体自然数中的那个最小的自然数1．

在这里，被定义的对象是自然数“1”，但借以定义这个“1”的概念是“最小”和“全体自然数所构成的总体N”，但在定义“自然数全体N”时，首先要借助于每个自然数，其中也包括“1”这个被定义的自然数在内．这就是借助于一个整体N来定义1，而被定义的1又包含在用以定义它的这个整体之中．

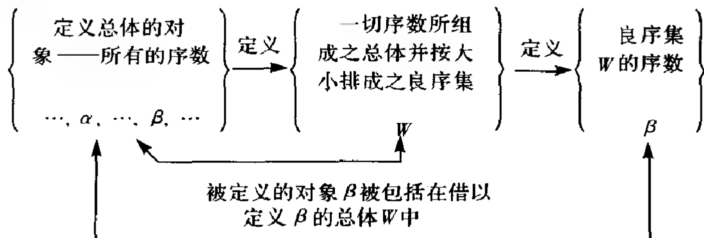
例2 李家庄村上年纪最大的人H．

在这里，被定义的对象是H这个人．但当我们对H下定义时，一方面借助了“年纪最大”这个概念，特别是借助了“李家庄村上所有的人所组成的总体G”这一概念．但要定义总体G的话，又要借助李家庄村上的每一个人，其中当然也包括H这个人在内．这就是借助于总体G来定义H，而H本身却又被包含在用以定义H的这个总体G之中．对此，我们还可用一个图表来刻画如下：



例 3　一切序数所组成的良序集 W 的序数 β.

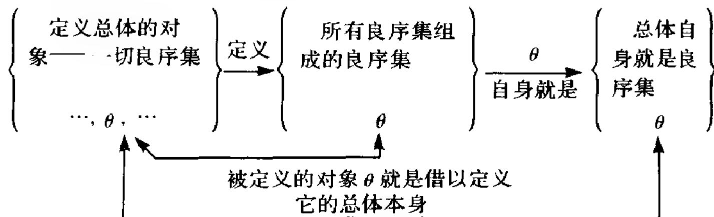
此例亦可用如下图表描述之.



例 4　一切良序集所组成的良序集 θ.

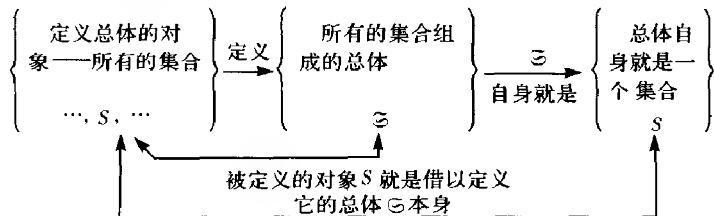
每个良序集都对应着一个序数，故把一切良序集汇成总体后，再按每个良序集所对应的序数的大小为序，把该总体排成良序集，记为 θ.

对此，我们亦用如下图表表达之.



例 5　一切集合所组成的集合.

本例可用如下图表描述之.



上述 5 例都运用非直谓定义法去下定义，但它们构成非直谓定义的具体过程却有所不同，可按其不同的情况分类如下：

（Ⅰ）广义非直谓：凡用非直谓定义法所定义的对象，可用直谓定义法重新定义它的话，就说这种非直谓定义过程为广义非直谓，如例 1 中的那个自然数“1”，既可借助于 N 定义它，也可不借助 N 而用直谓定义法定义它，又如例 2 中的 H，既可借助于 G 定义之，但也可用“李大娘的老伴”、“李小二的祖父”等直谓地定义之. 总之，当我们用非直谓定义法

定义了一个对象，但该被定义的对象并非只能借助于包括它的总体加以定义时，那么该非直谓定义过程是广义非直谓.

（Ⅱ）狭义非直谓：凡是用非直谓定义法所定义的对象非借助于包含它的总体定义之不可，那么这种非直谓定义过程叫做狭义非直谓. 如例3中用非直谓定义法所定义之序数β，由于序数β是用以定义它的总体（良序集W）的序数，不是别的良序集的序数，那么丢开总体W，如何来谈W的序数呢？也就是说β是W的β，所以β只能借助于W来定义它. 现在再看例2，设想有一个不是李家庄村上的外地人K，并且K对李家庄村上的人和事一无所知，但K要到李家庄村上找年纪最大的人（记为H）了解一件事，那么当K到达李家庄以后，如何向李家庄村上的人来表达“他要找H问事”这个意思呢？在此时此刻此境的K来说，就非借助于总体G来向别人询问和寻找H这个人不可了. 因而作为广义非直谓定义过程的例2来说，如果加上一系列限制条件，在特定情况下将可成为狭义非直为定义过程. 当然，通常从非直谓定义过程之分类角度来看，应当置之于不加任何约束条件的自然状况下进行划分.

（Ⅲ）等价式非直谓：凡是非直谓定义中的被定义对象，仅借助于“总体本身就是什么”这样的等价式刻画来确定的，则称该非直谓定义过程为等价式非直谓. 如例4中的被定义对象就是通过“θ本身就是一个良序集”这样的等价式刻画来确定的. 又如例5中的被定义对象也是通过“一切集合组成的总体$\mathfrak{S}$就是一集合S”这种自身等于自身的方式来刻画的. 如果把这种等价式的刻画亦算作一种自相的定义方式的话，当然也势必纳入非借助于总体定义的情形中去. 因此，等价式非直谓是狭义非直谓的特殊情形.

对于上文所论之三种非直谓定义过程，可用图表统一刻画如下：

{广义}：	{定义总体的对象 …, p, …}	$\xrightarrow{\text{定义}}$	{一切“…”组成之总体 Q}	$\xrightarrow{\text{用}Q\text{来定义}p}$	{p}
{狭义}：	{定义总体的对象 …, p, …}	$\xrightarrow{\text{定义}}$	{一切“…”组成之总体 Q}	$\xrightarrow{\text{只能借助}Q\text{来定义}p}$	{p}
{等价式}：	{定义总体的对象 …, p, …}	$\xrightarrow{\text{定义}}$	{一切“…”组成之总体 Q}	$\xrightarrow{\text{总体}Q\text{本身就是}p}$	{p}

如上关于非直谓定义法的分析讨论，以及关于非直谓定义过程之分类与关系，对于我们了解悖论的成因和寻找避免悖论的方法均有密切关系. 正如本节开头的一段所讨论的那样，构成悖论的深刻原因与非直谓定义有关，就如2.3节与2.4节中前前后后论及的那些悖论来看，诸如“一切集合的集合”、“一切序数所组成之良序集的序数”、“不可定义的序数中最小的一个”、“在用少于或等于100个英文字母所不能描述的自然数中最小的一个”，如此等等都是直接用非直谓定义法定义的. 正因为Russell明确地看到了这些情况，为了避免悖论的出现，Russell提出一个原则如下：

恶性循环原则　没有一个整体能包含一个只能借助于这个整体来定义的对象.[36]

基于这一原则，Russell构造和发展了他的分支类型论.

在这里，为使下文的讨论与表述醒目，将引进一系列记号用以缩写或简记某些自然语句或词组，应当注意的是仅仅用以缩写或简记，这与形式化没有关系. 这些用以简记的符号有：

$\& =_{df}$“并且”

$\neg =_{df}$“非”

$\exists =_{df}$“有”

$\mathrm{God}fp =_{df}$“对象 p 只能借助总体 G 来定义”

$p \in G =_{df}$“对象 p 被包含在总体 G 中”

$G = p =_{df}$“总体 G 就是对象 p”

$A \Rightarrow B =_{df}$“若 A 成立，则 B 成立”

$A \Leftarrow\mid\mid\Rightarrow B =_{df}$“$A$ 和 B 不能同时成立”

现在，我们先分析讨论恶性循环原则与非直谓定义法之间的关系，对于广义非直谓定义法，我们可以不必考虑，因为它既然可用直谓定义法予以重新定义，所以与我们的问题和困难没有什么关系，重要的是关于狭义非直谓定义法的分析讨论. 运用上述简记符号，首先可将Russell的恶性循环原则表述为：

$$\neg \exists G \exists p(\mathrm{God}fp \& p \in G),$$

其次根据狭义非直谓定义法的意义，却正好相反，即若承认狭义非直谓定义法的使用是合法的，则无非是指：

$$\exists G \exists p(\mathrm{God}fp \& p \in G).$$

所以恶性循环原则与狭义非直谓定义法的合法性是不能同时成立的. 另外，前文已指出：

等价式非直谓⊊狭义非直谓，

所以如下结论为真.

结论一：若承认恶性循环原则，就不能承认狭义非直谓定义法的使用，因而也就不能承认等价式非直谓定义法的使用.亦即我们有：

[恶性循环原则]⟸|⟹[狭义非直谓定义法]

⋓

[等价式非直谓定义法]

现在让我们对等价式非直谓定义法作进一步分析，按照上文所列之简记符号，如果承认等价式非直谓定义法的使用合理而有效，则无非是指

$$\exists G \exists p(\mathrm{God} fp \ \&\ G = p \& p \in G),$$

既然 $G = p$，则在上式中可用 G 取代 p 的出现，因而我们又有

$$\exists G(\mathrm{God} fG \ \&\ G = G \& G \in G),$$

由此而获 $\exists G(G \in G)$. 显然，在概括原则之下所构造的集合也是总体或整体.因此限于集合的观点，$G \in G$ 正表示“一集合是它自身的一个元素”，故立足于集合的观点，如果承认等价式非直谓定义法的使用是合法的，则就必须承认本身分子集这个概念的合理性，但它却是导致悖论的深刻原因，所以我们希望否认 $G \in G$ 的合理性，为之，应建立如下原则，亦即

类型混淆原则　任何一个集合决不是它自身的一个元素.

但若运用上文所列之简记符号，上述类型混淆原则可记为$\neg \exists G(G \in G)$，因此正好与等价式非直谓定义法的使用所导致的结果$\exists G(G \in G)$ 相对立.因此，下述结论为真.

结论二：如果承认类型混淆原则，那就不能承认等价式非直谓定义法的使用是合理的，反之，如果承认等价式非直谓定义之使用的合法性，则就不能承认类型混淆原则.总之，我们有：

[类型混淆原则]⟸|⟹[等价式非直谓定义法].

现在，让我们对 Russell 基于恶性循环原则所形成和发展起来的分支类型论的思想方法作一简略的介绍.

首先，Russell 对于性质，按其所属之对象的类型加以分类：

[0 类] 属于第 0 类的是那些论域中之对象的名称，如 $a, b, c, \cdots$

[1 类] 属于第 1 类的则是这些对象的性质，如 $f(a), g(b), g(a), \cdots$ 中之 $f, g, \cdots$

[2 类] 属于第 2 类的则是那些性质的性质，如 $F(f), G(f), \cdots$ 中之

F,G,…

[3 类] 属于第 3 类的则是那些性质的性质的性质,…

⋮

[n 类] 属于第 n 类的则是那些性质的性质的性质 … 的性质,…

⋮

如此等等.

对于性质之类的划分,必须遵循下述一条基本原则:

分类原则 每一谓词(性质)都必须从属于一个确定的类,而且每一类的性质,只有当其使用于直次于它的那个类的对象才是有意义的,因此,如 $f(a)$,$F(g)$,… 是有意义的,但如 $F(a)$,$f(f)$,$a(b)$,… 都是无意义的.

现在我们来把 Russell 对于性质的分类集合化,亦即对于集合,要按照它所属之对象的类型加以分类:

$S[0 类]^{\in}$ 属于第 0 类的是那些论域中之对象的名称,如 a,b,c,…

$S[1 类]^{\in}$ 属于第 1 类的则是由这些对象所组成之各种集合,如 $a \in f$,$b \in g$,… 中之 f,g,…

$S[2 类]^{\in}$ 属于第 2 类的则是那些集合的集合,即如 $f \in F$,$f \in G$,… 中之 F,G,…

$S[3 类]^{\in}$ 属于第 3 类的则是那些集合的集合的集合,…

⋮

$S[n 类]^{\in}$ 属于第 n 类的则是那些集合的集合的集合 … 的集合,…

⋮

如此等等.

相应地,我们也要把 Russell 关于性质的分类原则集合化,使之陈述为如下的形式:

分类原则($\in$) 每一集合都必须从属于一个确定的类,而且每一类的集合,只有当其使用直次于它的那个类的对象作为元素来构成时才是有意义的.因此,诸如 $a \in f$,$g \in F$,… 是有意义的,但如 $a \in F$,$f \in f$,$a \in b$,… 是无意义的.

在上述分类原则($\in$)之下,既然有如 $S \in S$ 或 $a \in b$ 等等都是无意义的,因此,任何集合 S 就绝不会是它自身的一个元素,否则,若设有一集 $S = \{a,b,c\}$,并有 $S = c$,那么由 $c \in S$ 且 $S = c$,即可推出诸如 $S \in S$ 或 $c \in c$ 一类违背分类原则($\in$)之无意义的结果了.可见,只要把 Russell 关于性质的分类原则集合化,那么类型混淆原则就必然被确认.

亦即我们可有如下结论.

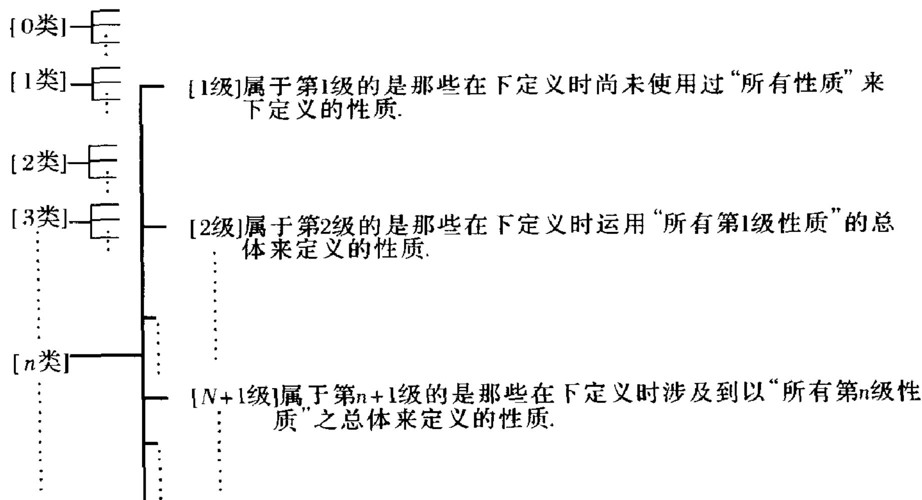
结论三:如果分类原则(∈)被确认,那么类型混淆原则成立,亦即我们有:

$$[分类原则(\in)] \Rightarrow [类型混淆原则]$$

现在,让我们把上文所论之结论一、二、三综合起来,并表达如下:

$$\left.\begin{cases} \qquad\qquad [恶性循环原则] \Leftarrow\mid\mid\Rightarrow [狭义非直谓定义法] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\ [分类原则] \to [类型混淆原则] \Leftarrow\mid\mid\Rightarrow [等价式非直谓定义法] \end{cases}\right\} (*)$$

Russell 进一步认为,除掉对于性质要作出类的划分之外,还要针对性质的定义方法,再把同一类中的性质作出级的划分,那些在下定义时尚未涉及到"所有的性质"的性质是第1级的,而那些在下定义时涉及第 n 级的"所有的性质"的性质是第 $n+1$ 级的,如此,当不具体指明所考虑的级,则凡涉及"所有的性质"的表达是没有意义的.说得更清楚些,则如下表所示:



如此,所有的性质(谓词)首先按对象的性质、性质的性质…加以分类,再按类中之性质的定义方法加以分级,因之,每一性质都归属于一定的类和级.由于级是在类的内部划分的,如同上表所示,Russell 的这一理论就叫做分支类型论.

在这里,应指出关于级的划分是针对定义方法而说的,而关于类的划分却与定义方法不相干,因此,关于上述两种划分的内涵应予区别.现

就逻辑语言中之“性质”（谓词）而言，如果不囿于自然语言之解释去作字面上的理解，我们可以通过本节一开始所列举的关于非直谓定义法的例子，对上述 Russell 之类中分级的含义作出说明．如例 2 所述，若把李家庄村上的每一个人视为某一类中的第 n 级的一个性质，那么按例 2 中那种非直谓定义法对 H 下定义时，由于借助了李家庄村上所有的人（性质）所组成的总体 G，亦即借助了第 n 级的所有的性质（人）．因此，H 就是一个涉及第 n 级的所有的性质的性质了，按规定 H 便是第 $n+1$ 级的性质了．按照恶性循环原则，凡是只能借助于第 n 级的“所有性质”定义的那个属于第 $n+1$ 级的性质，则是决不允许包含在第 n 级性质中去的．再看例 3，如果把所有的序数算作第 1 级性质，则一切序数所组成之良序集 W 的序数 β 这个性质就是第 2 级性质了，而且 β 这个性质是一个只能借助第 1 级的所有性质来定义的性质，故由恶性循环原则，作为第 2 级的性质 β 决不能被包含在第 1 级的性质中，从而 β 一定不能被包括在 W 之中．

在恶性循环原则之下，对于那些与非直谓定义法直接相关的悖论，诸如 Cantor 悖论、Burali-Forti 悖论和 Richard 悖论等等，根据上文所论之结论一，可知它们均可避免，无需详论．现在来看 Russell 悖论中所构造的那个一切非本身分子集的总体 $\Sigma=\{x \mid x \notin x\}$，在这里好像没有直接使用非直谓定义法，其实在恶性循环原则之下，本身分子集的概念是被排斥的，亦即具有性质 $x \in x$ 的 x 不是集合，从而一方面知道那种一切集合的总体 $E=\{x \mid x \text{ 为一集}\}$ 不是集合，因为 E 具有性质 $x \in x$．另一方面，此处正表明了任何集合都是非本身分子集，从而 $\Sigma=\{x \mid x \notin x\}$ 不是集合，否则若设 Σ 是集合，则 Σ 也是非本身分子集，即 Σ 具有性质 $x \notin x$，于是由 Σ 的构造可知 $\Sigma \in \Sigma$，即 Σ 具有性质 $x \in x$，矛盾．故 Σ 在恶性循环原则之下不是集合．现在，让我们利用上文所论之结论一、二、三，对 Russell 悖论的解释方法具体阐明之．

第一步：如果承认恶性循环原则，则由结论一可知，狭义非直谓定义法的使用不合理，由于等价式非直谓是狭义非直谓的特殊情况，从而推知等价式非直谓定义法的使用不合法，于是由结论二推知，类型混淆原则被确认，从而具有性质 $x \in x$ 的 x 不是集合．

第二步：由上述第一步所获结论直接推知，任何集合都是非本身分子集，亦即任何集合 x 都具有性质 $x \notin x$．

第三步：一切非本身分子集汇集起来所构成的总体 $\Sigma=\{x \mid x \notin x\}$ 不是集合，否则若设 Σ 是一集合，则由上述第二步推知 Σ 应具有性质 $x \notin x$，由 Σ 的构造可知，任何具有性质 $x \notin x$ 的对象均为 Σ 的元素，从而 Σ

$\in \Sigma$,即 Σ 具有性质 $x \in x$,于是由上述第一步,应有结论 Σ 不是集合,矛盾于原设.这表明在恶性循环原则之下,Σ 既然不是集合,那么 Russell 悖论也就不会出现.

如上所论之第一、二、三步说明在恶性循环原则之下,Russell 悖论可以避免.但在上面的讨论中,一方面关键在于第一步所获之结果,即凡是具有性质 $x \in x$ 的 x 不是集合,另一方面在第一、二、三步中只利用了上文所论之结论一和结论二,没有利用结论三,事实上,我们利用结论三,可以利用分类原则($\in$),而避开恶性循环原则的使用,同样可获"凡是具有性质 $x \in x$ 的 x 不是集合"的这一结果,因为:

(*)　若设分类原则($\in$)成立,则由结论三推知类型混淆原则成立,所以具有性质 $x \in x$ 的 x 不是集合.

根据(*),再重复上文所论之第二、三两步,同样可以给出 Russell 悖论的解释方法.

如上所论,Russell 通过恶性循环原则的思想方法,否定狭义非直谓定义法的使用,进而给出种种悖论的解释方法.但在这里,首先从方法论意义上说,Russell 的分支类型论也是立足于限制概括原则之造集的任意性,进而寻找避免悖论的方案,亦即在造集的过程中禁止了狭义非直谓定义法的使用,或者说凡是涉及狭义非直谓定义法的使用而汇成的总体,一概不承认它们为合法的集合.然而其次的问题是:非直谓定义法不仅在数学上,而且在日常生活中也往往是不可缺少的.从数学上看,Weyl 曾指出,把上确界定义为上界中最小的一个,这就是借助于"上界的总体"去定义它的,因而运用了非直谓定义法,此处虽然包含了某种循环,却是无害的,它不仅没有引向悖论,而且上确界的概念在数学中是十分有用的.在日常生活中,可以本节开头所述之例 2 的引申中所涉及的那个外地人 K 为例,当 K 到李家庄村上去找 H 时,由于 K 对李家庄村上的人和事一无所知,因而对 K 而言,他就非要借助于狭义非直谓定义法去表达他要找 H 的想法不可,从而 K 在此时此刻此境就不可能同时为 Russell 的信徒或恶性循环原则的笃信者.总之,如果坚持恶性循环原则,那么就数学领域而言,就势必要将不少有用的数学概念抛弃掉,一些合理的数学定理不能证明,因而虽然排除了悖论,却失去了不少合理的内容.另一方面,Russell 的分支类型论,不仅要按照对象的性质、性质的性质 … 加以分类,而且对于每一类中的性质,又要按照性质的定义方法加以分级,以致分支类型论的展开变得非常累赘、繁琐和复杂,因而那种依靠类中分级与恶性循环原则来避免悖论的方案,以及整个分支类型论

的展开，都不为大多数数学家所欢迎.

后来，由 Russell 的学生 Ramsey 把分支类型论加以简化. 在 Ramsey 看来，悖论可分为两类：一类叫逻辑数学悖论，它只是由逻辑或数学系统中的概念构成，因而总能用逻辑与数学符号来表达. 例如 Cantor 悖论、Russell 悖论与 Burali-Forti 悖论等均属这一类. 另一类可叫做语义学悖论，这类悖论由命名、真、假等概念构成，因而如表明、刻画、真等语义项成为它不可少的组成部分. 例如强化了的说谎者悖论、理发师悖论、Grelling 悖论等皆属这一类. 综观前述逻辑数学悖论，无不导源于违反类型混淆原则的本身分子集，后经 Ramsey 的研究，只要坚持类型混淆原则，便足以排除逻辑数学悖论，因而如上文所论那样，只要承认 Russell 的集合化了的分类原则(∈)，便能推知类型混淆原则成立，从而否认等价式非直谓定义法的使用，进而就能给出种种逻辑数学悖论的解释方法. 可能读者会问，如何运用类型混淆原则去避免 Burali-Forti 悖论？这里要注意，每一良序集都对应于一个序数，反之，每一序数也有一良序集与之对应，从而本节开头所举的例 3 是可以化归为例 4 的，而例 4 则是由等价式非直谓予以定义的，所以实质上还是使用了等价式非直谓定义法，故由结论二可知，只要承认类型混淆原则，等价式非直谓定义法就不能使用，从而 Burali-Forti 悖论也就不会出现. 至于那些语义学悖论，则由于它们不能在逻辑数学的符号语言中表达，从而在构造与发展逻辑数学系统时，Ramsey 认为可以不予考虑语义学悖论，对于避免语义学悖论之事可以纳入语义学领域中去处理. 所以 Ramsey 就废除分支类型论中关于级的划分，并在保留类的划分的基础上建立了简单类型论. 正因为简单类型论只承认类型混淆原则而取消恶性循环原则，故在狭义非直谓定义法中只排斥等价式非直谓一类特殊情形，尚可保留那些不涉及类型混淆的狭义非直谓定义法的使用. 从而简单类型论既能避免逻辑数学悖论的出现，又不至于过多地失去合理的数学内容，所以 Ramsey 的简单类型论受到大多数数学家的欢迎.

对于非直谓定义法，Ramsey 指出：这里的确包含了循环，但这一循环是无害的，不是恶性的. 此处作为这一断言的认识论基础是这样的，性质的整体本身已经存在，而作为非直谓定义，只是一种加以鉴别的方法，如同"房间里最高的人"一样，这是一个经验的事实.[39] 所以 Ramsey 在数学领域中既保留了狭义非直谓定义法中的合理因素的使用，同时又能排除逻辑数学悖论的出现. 以致 Russell 的分支类型论与恶性循环原则就显得是多余的了. 关于 Russell-Ramsey 对悖论之解释方法的讨论，到

此暂且告一段落. 本书下文中还将讨论逻辑主义学派的思想观点，到时还将论及恶性循环原则等等.

3.3 $N(3\leqslant n<\omega)$值逻辑悖论与无穷值逻辑悖论

关于古典集合论中出现悖论问题的探索和研究，人们发现如下四件事不能同时成立：

(1) $x\notin x$ 是一个性质(含 x 的语句).

(2) 任给一个性质 $\varphi(x)$ 决定一个集合 A，亦即 $x\in A\leftrightarrow\varphi(x)$，实际上就是承认概括原则.

(3) 集合也是个体(即论域中的研究对象)，因而 x 的出现均可用 A 取代.

(4) $p\leftrightarrow\neg p$ 为一矛盾，实际上就是承认排中律.

现在，我们用反证法来证明上述(1)～(4)不能同时成立. 亦即反设(1)～(4)同时成立，则由(1)知，可取 $x\notin x$ 为一性质 $\varphi(x)$，于是由(2)即知有集合 A 使有 $x\in A\leftrightarrow x\notin x$，再由(3)知可用 A 取代 x 的出现，故有 $A\in A\leftrightarrow A\notin A$，由(4)必须承认 $A\in A\leftrightarrow A\notin A$ 为一矛盾. 这表明原设不真，亦即上述(1)～(4)条中至少要否定一条，不可能同时成立.

Russell 从否定(1)的角度展开他的类型论，但要注意，所谓否定(1)，指的是否认 $x\notin x$ 为一用以造集的性质(谓词)，并不是否定 $x\notin x$ 这一概念本身的合理性. 正好相反，在恶性循环原则之下，$x\in x$ 是被排斥的，最后指出 $\Sigma=\{x\mid x\notin x\}$ 不是集合，亦即 $x\notin x$ 不得作为造集谓词. 关于类型论的思想内容已于 3.1 节中作过介绍.

Zermelo Fraenkel 基于否定(2)而构造和发展 ZFC 系统，关于 ZFC 系统的思想内容及其对悖论的解释方法已在 3.1 节中讨论过了.

J. Von Neumann-Bernays-Gödel 在否定(3)的基础上构造和发展他们的 NBG 系统，NBG 系统亦简称为 GB 系统，这也是为了避免悖论而建立起来的一个著名的近代公理集合论系统，该系统首先由 J. Von Neumann 在 1925 年提出，后来由 Bernays 于 1937 年作了改进并进一步发展了这个系统，再经过 Gödel 的改进和整理加以采用.

在 GB 系统中，引入了类的概念，并区分了集合和真类，集合既可以集合为其元素，也可为其他类的元素，但规定真类只能以集合为其元素，真类本身不能作为任何类的元素，并由此而摆脱历史上既经出现的逻辑

数学悖论.在本书中不再另辟章节讨论GB系统对悖论的解释方法,但为了比较GB系统与ZFC系统之间的优缺点,在此对NBG系统的基本概念和公理系统顺便介绍一番.

在NBG系统的语言中有两种变元,即集合变元和类变元,通常用小写英文字母$a,b,c,u,v,x,y,z,\cdots$表示集合,又用大写英文字母$A,B,C,U,V,X,Y,Z,\cdots$表示类.在语言中除了二元关系符号$\in$之外,还有两个一元谓词符号$\mathfrak{M}$和Cla.$\mathrm{Cla}(\xi)$指:ξ是类.$\mathfrak{M}(\xi)$指:ξ是集合.$\xi\in\eta$指:ξ属于η.NBG系统共有5组18条非逻辑公理.

第1组(A组)　基本公理:

A1　$\forall x\ \mathrm{Cla}(x)$

该公理说任何集合是类.

A2　$\forall X\forall Y(X\in Y\rightarrow\mathfrak{M}(X))$

该公理说作为某个类之元素的类是集合.

A3　$\forall X\forall Y[\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)\rightarrow X=Y]$

该公理说有相同元素的两个类是相等的.这就是类的外延公理.

A4　$\forall x\forall y\exists z\forall u[u\in z\leftrightarrow(u=x\vee u=y)]$

该公理说任给二集x和y,则有一集z,它恰以x或y为其元.这是集合的无序对公理.

上述4条基本公理区分了类与集合,约定了两个类相等的含义.基于上述基本公理可定义有序对$\langle x,y\rangle$,有序三元组$\langle x,y,z\rangle$等概念.

第2组(B组)　类的存在性公理:

B1　$\exists A\forall x\forall y[\langle x,y\rangle\in A\leftrightarrow x\in y]$

该公理指出了对应着集合之间的$\in$关系的有序对的类(即二元关系)的存在性.

B2　$\forall A\forall B\exists C\forall u[u\in C\leftrightarrow(u\in A\wedge u\in B)]$

该公理指出了任何两个类的交是类.

B3　$\forall A\exists B\forall u[u\in B\leftrightarrow\neg(u\in A)]$

该公理指出了一个类的补的类的存在性.

B4　$\forall A\exists B\forall x[x\in B\leftrightarrow\exists y(\langle x,y\rangle\in A)]$

该公理指任何序偶类的定义域是类.

B5　$\forall A\exists B\forall x\forall y[\langle x,y\rangle\in B\leftrightarrow x\in A]$

该公理指任何一个类可成为某二元关系(此处为序偶类B)的定义域.

B6　$\forall A\exists B\forall x\forall y[\langle x,y\rangle\in B\leftrightarrow\langle y,x\rangle\in A]$

该公理指二元关系类的逆关系仍为类.

B7 $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z[\langle x,y,z\rangle \in B \leftrightarrow \langle z,y,x\rangle \in A]$

该公理指三元关系类进行轮换后的三元关系还是类. 就是说，对于任意的类 A，总存在类 B，使得 $\langle x,y,z\rangle \in B$ 当且仅当 $\langle z,y,x\rangle \in A$.

B8 $\forall A \exists B \forall x \forall y \forall z[\langle x,y,z\rangle \in B \leftrightarrow \langle y,z,x\rangle \in A]$

该公理指三元关系类进行一种对换后还是类.

对于上述 B7 与 B8 应注意，由于有序三元组的任何置换均可由上述特定的轮换与对换来生成，故由上述 B7 与 B8 推知，三元关系的任何置换关系仍为类.

上述 B 组公理指出了由哪些条件可以决定一个类，又指出如何由已知类去构造新的类.

第 3 组（C 组）　集合的存在性公理：

C1 $\exists a\{\neg E\mathfrak{M}(a) \wedge \forall x[x \in a \rightarrow \exists y(y \in a \wedge x \subset y)]\}$

此处符号 $E\mathfrak{M}(a)$ 指 a 为空集，该公理说无条件承认有一非空集合 a，对于 a 的任一元 x，必有 a 的元素 y，使得 x 是 y 的真子集，所以集合 a 必有无穷多个元素，即 C1 为无穷公理.

C2 $\forall x \exists y \forall u \forall v[u \in v \wedge v \in x \rightarrow u \in y]$

该公理断言对任何集合 x，都存在一集 y，使得集合 x 的任何元素的元素都是 y 的元素. 此乃并集公理.

C3 $\forall x \exists y \forall u[u \subseteq x \rightarrow u \in y]$

该公理说任何集合 x，都有集合 y 存在，使得 x 的任一子集都是 y 的元素，这是幂集公理.

C4 $\forall x \forall A\{\mathscr{U}_n(A) \rightarrow \exists y \forall u[u \in y \leftrightarrow \exists v(v \in x \wedge \langle u,v\rangle \in A)]\}$

此处符号 $\mathscr{U}_n(A)$ 指类 A 是单值的①. 该公理说对任何集合 x 和任何单值的类 A，总有集合 y 存在，此 y 恰由 x 的元经由单值二元关系类 A 所产生的集组成. 此即替换公理.

注意上述 C 组公理中由 C1，C2，C3 所决定的集并不唯一确定，因为 $\rightarrow$ 与 $\leftrightarrow$ 完全不同.

第 4 组（D 组）　正规公理：

D1 $\forall A[\neg E\mathfrak{M}(A) \rightarrow \exists u(u \in A \wedge Ex(u,A))]$

此处符号 $Ex(u,A)$ 指 u 与 A 没有公共元素. 该公理说，对任何非空类 A，必有一元 u，使得 u 与 A 没有公共元素. D 组公理相当于 ZFC 系统中的正则公理，所以 GB 系统中也不存在 $\in$ 关系的无穷串.

---

① 类 X 单值指 $\mathscr{U}_n(X) \leftrightarrow \forall u \forall v \forall w[\langle u,v\rangle \in X \wedge \langle u,w\rangle \in X \rightarrow v = w]$.

第 5 组(E 组)　选择公理：

E1 $\exists A\{\mathcal{U}_n(A)\wedge\forall x[\neg E\mathfrak{M}(x)\rightarrow\exists y(y\in x\wedge\langle y,x\rangle\in A)]\}$

这是一条强形式的选择公理，指存在着单值的类 A，对任何非空集合 x，都有 x 的元 y 存在，使有 $\langle y,x\rangle\in A$. 因为单值关系就是函数，因而该公理就是指无条件承认存在着全选择函数 A，它能从任何一个非空集合中唯 ·地选出 一个元素来.

在 NBG 系统中，所谓本原命题函词，指的是仅含下述(a) ～ (e) 的合式公式. 其中：

(a) 变元，

(b) 特殊符号：$A_1,\cdots,A_k$，

(c) $\in$，

(d) 命题联接词，

(e) 约束的集合变元，即约束变元都是集合变元.

例如. $\forall u(u\in X\rightarrow u\in A)$ 是本原命题函词，因其中之约束变元均为集合变元.

按照上述本原命题函词的要求，如果出现被约束的类变元，即如 $\exists X,\forall Y$ 等等，则就不是本原命题函词了. 又如 $\forall x(x\in A\rightarrow x\subseteq y)$ 也不是本原命题函词，因为其中出现了定义符号 $\subseteq$.

应当指出，本原命题函词范围很窄，大量谓词要涉及定义符号.

在 NBG 系统中，所谓正规概念 B，指存在着本原命题函词 φ 使有

$$B(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leftrightarrow\varphi(X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

例如，$\in$，　，$\mathfrak{M}$ 等概念都是正规概念，因为我们可有：

(1) $X\in Y\leftrightarrow X\in Y$，

(2) $X=Y\leftrightarrow\forall u(u\in X\leftrightarrow u\in Y)$，

(3) $\mathfrak{M}(X)\leftrightarrow\exists u(u=X)$.

事实上，在上述表达式之 $\leftrightarrow$ 的右边的表达式，或者是本原命题函词，或者如(3) 中之 $\exists u(u=X)$，这是一个仅含正规概念的合式公式，从而总可化归为本原命题函词.

在 NBG 系统中，正规运算 $\mathcal{U}$ 是指存在 ·个本原命题函词 φ，并能使下式成立的运算：

$$Y\in\mathcal{U}(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leftrightarrow\varphi(Y,X_1,X_2,\cdots,X_n).$$

例如，关于类的补运算 —，交运算 $\cap$，定义域 D 等等都是正规运算. 事实上，我们有：

(1) $Y\in(\quad A)\leftrightarrow\mathfrak{M}(Y)\wedge\neg(Y\in A)$，

(2) $Y \in A \cap B \leftrightarrow Y \in A \land Y \in B$,

(3) $Y \in D(A) \leftrightarrow \mathfrak{M}(Y) \land \exists y(Y, y) \in A$.

此处应注意,在上述表达式之 $\leftrightarrow$ 右边的表达式中虽然出现 $\mathfrak{M}$,但已知 $\mathfrak{M}$ 是正规概念,因而总可化归为本原命题函词.

在 NBG 系统中的正规命题函词允许含有定义符号,但它必须是一个能与某个本原命题函词相等价的合式公式. 例如

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \subseteq Y)$$

是一个正规命题函词,因为我们有

$$x \subseteq Y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in Y),$$

亦即 $x \subseteq Y$ 与本原命题函词 $\forall z(z \in x \rightarrow z \in Y)$ 相等价.

在 NBG 系统中,可按命题函词的构造,归纳地证明如下两个关于类的一般存在定理.

定理 1 若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是除了 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之外,没有自由变元的本原命题函词,则存在一个类 A,使对所有的集合 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

定理 2 若 φ 是正规命题函词,则存在一个类 A,使对所有集合 x_1, $x_2, \cdots, x_n$ 及类 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 有

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \in A \leftrightarrow \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, X_1, X_2, \cdots, X_k).$$

显然,上述定理 2 从两个方面推广了定理 1,其一是定理 2 中之 φ 是正规命题函词,因而允许定义符号出现,定理 1 中之 φ 是本原命题函词,因而不允许有定义符号出现. 其二是定理 2 的 φ 中除有构造类的集合变元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之外,还允许出现其他的自由类变元 $X_1, X_2, \cdots, X_k$. 此处应注意对 φ 的正规性要求,不能有被约束的类变元,即如 $\exists X$, $\forall Y$ 等等出现. 事实上,正规命题函词只是在本原命题函词基础上,允许出现与本原命题函词相等价之合式公式中的定义符号,因此若出现被约束的类变元,这就不是本原命题函词了.

如上关于类的一般存在性定理可视为关于概括原则的形式化,但是上述定理 2 只承认任何正规命题函词可以构造类,而被构造出来的类未必是集合,而概括原则却认为任何 Cantor 意义下的造集谓词均可构造集合. 上述定理 2 只承认可构造类,而有些真类不是集合,如一切集合之总体 E,一切非本身分子集的总体 Σ 等等可以是 NBG 中的真类,但不是集合. 并由此而给出种种逻辑数学悖论的解释方法.

现在让我们把 NBG 系统与 ZFC 系统作一比较如下:

(1)GB 系统计有 5 组 18 条非逻辑公理,并且其中没有公理模式,因

而只有有限多条公理. ZFC 系统的非逻辑公理中包含公理模式，如子集公理和替换公理都是公理模式，所以有无穷多条非逻辑公理.

(2)GB系统中关于类的一般存在定理相当接近概括原则，但ZFC系统中的子集公理则不然，它是在已知集合中构造集合，这与概括原则相去甚远.

(3)GB系统中的真类不是任何类的元，这一点很不自然，因为从直观上说，无论真类 C 有多大，对于 $\{C\}$ 和 $C \in \{C\}$ 一事理应十分自然和合理，但在 GB 系统中却是不允许的.

如上之(1)与(2)显得 NBG 系统较为优越，而上述(3)却使 NBG 系统显得欠缺有余了.

可以证明 NBG 系统是 ZFC 系统的一个非本质的保守扩张，即任何在 ZFC 系统中的可证公式在 NBG 系统中也可证明，而 NBG 中不含类变元的可证语句集与 ZFC 系统的可证语句集是重合的，所以 NBG 系统与 ZFC 系统之数学内涵的丰富程度基本相当，也有人说 NBG 系统是用集合与类的术语重新叙述的 ZFC 系统.

Russell-Ramsey 的类型论，Zermelo-Fraenkel 的 ZFC 系统，J. Von Neumann-Bernays-Gödel 的 NBG 系统，都能对历史上既经出现的二值逻辑数学悖论给出解释方法，并且至今没有在各自的系统内出现新的悖论. 另一方面，所说的三种避免悖论的方案的共同特点是：立足于修改概括原则，限制概括原则之造集的任意性. 然而概括原则又显得那么自然、直观，使用起来又那么方便有力，再说那些立足于修改概括原则而避免悖论的方案，虽然在系统内避免了以往出现的悖论，同时却要失去相当一块合理的数学内容. 何况还不能保证今后一定不出问题. 人们一方面考虑如何去寻找一个新的修改概括原则的方案，使之在排除悖论的同时，不使合理的数学内容蒙受损失，至少是如何把这种损失减少到最低限度，以致逐步形成了一个所谓如何修改概括原则的历史遗留问题. 另一方面，人们也可考虑保留概括原则，寻求其他出路. 20 世纪 30 年代，苏联逻辑学家 Бочвар(Bochvar) 有此一举.

Бочвар(Bochvar) 以否定(4)为起点，构造和发展她的多值逻辑. 她希望在集合论的非逻辑公理系统中保留概括原则，而基于否定排中律，把原来配套于集合论的二值逻辑系统改为多值逻辑系统，进而在系统中给出悖论的解释方法，即在系统内避免悖论的出现. 但在 20 世纪 50 年代，莫绍揆率先证明了 Łukasiewicz 有穷值逻辑系统 $L_n(3 \leqslant n < \omega)$ 配上概括原则必定出现悖论，这对 Бочвар 的设想和计划是一个很大的冲击，

因而很著名，但是莫绍揆在发表这项工作[40]的时候，采用了为多数人所不熟悉的前置符号系，证明步骤又过于省略，以致人们对此项工作，知其然者很多，知其所以然者甚少，因之，我们曾在文献[41]中以通俗的自然语言和大家所熟悉的中置符号系评介过这项工作，同时还补足了各个被省略的证明步骤.

现在，我们仍将按此原则分三个步骤评析莫绍揆的 $n(3 \leqslant n < \omega)$ 值逻辑悖论：第一步指出在满足某些条件的系统中一定包含悖论，并分析指出所构造的悖论也是 Russell 悖论的变形，因为所构造的悖论的造集谓词的逻辑真值表达式，也是 Russell 悖论的造集谓词的逻辑真值表达式的一种推广形式；第二步指出 Łukasiewicz 的有穷值逻辑系统 $Ł_n(3 \leqslant n < \omega)$ 配以概括原则后，正是第一步中所说的那种满足这类条件的系统，因而概括原则配以 $Ł_n(3 \leqslant n < \omega)$ 以后，仍然包含悖论；第三步指出无穷值逻辑系统 $Ł_{\aleph_0}$ 或 $Ł_t$ 配以概括原则后，却不是第一步中所说的那种满足该类条件的系统，因而仍用第一步中所说之构造悖论的办法，无法断定概括原则配以 $Ł_t$ 或 $Ł_{\aleph_0}$ 之后是否存在悖论.

我们规定缊涵词 $\rightarrow$ 指的是满足下述推理规则的逻辑联接词：

由 p 及 $p \rightarrow q$ 可得 q，即 $p, p \rightarrow q \vdash q$.

又 $(p \rightarrow)^n q$ 是一种简记，其递归定义为：

$(p \rightarrow)^1 q$ 指 $p \rightarrow q$

$(p \rightarrow)^2 q$ 指 $p \rightarrow (p \rightarrow)^1 q$，即 $p \rightarrow (p \rightarrow q)$

⋮

$(p \rightarrow)^{n+1} q$ 指 $p \rightarrow (p \rightarrow)^n q$

⋮

设 p 为一命题符号，由概括原则，可构造集合：

$$a_n = \{x \mid ((x \in x) \rightarrow)^n p\}.$$

此外，规则 A_n 指：

由 $(p \rightarrow)^{n+1} q$ 可得 $(p \rightarrow)^n q$，即 $(p \rightarrow)^{n+1} q \vdash (p \rightarrow)^n q$.

现在，我们首先证明下述定理.

定理 1　设 $\mathfrak{S}$ 为任给的一个系统. $\mathfrak{S}$ 满足下列条件：

(1) 概括原则成立，故上述 $a_n = \{x \mid ((x \in x) \rightarrow)^n p\}$ 为一集合.

(2) 分离规则成立，即有 $p, p \rightarrow q \vdash q$，

(3) 同一律成立，即有 $p \rightarrow p$，

(4) 上述规则 A_n 成立，即有 $(p \rightarrow)^{n+1} q \vdash (p \rightarrow)^n q$，

则此系统 $\mathfrak{S}$ 内一定包含悖论.

证明　由条件(1)，根据集合 a_n 的构造和定义可知

$$x \in a_n \leftrightarrow ((x \in x) \rightarrow)^n p,$$

现于上式中用 a_n 取代 x 的出现而有

$$a_n \in a_n \leftrightarrow ((a_n \in a_n) \rightarrow)^n p,$$

由(3)知相同的谓词可以互相蕴涵，于是：

(Ⅰ) $a_n \in a_n \rightarrow ((a_n \in a_n) \rightarrow)^n p$

(Ⅱ) $((a_n \in a_n) \rightarrow)^n p \rightarrow a_n \in a_n$

由 $(p \rightarrow)^n q$ 的递归定义可知上述(Ⅰ)就是

(Ⅲ) $((a_n \in a_n) \rightarrow)^{n+1} p$

再由条件(4)运用规则 A_n 而有

(Ⅳ) $((a_n \in a_n) \rightarrow)^n p$

由上述(Ⅱ)及(Ⅳ)，并根据条件(2)使用分离规则而有

(Ⅴ) $a_n \in a_n$

由上述(Ⅴ)和(Ⅰ)，根据条件(2)得

(Ⅵ) $((a_n \in a_n) \rightarrow)^n p$

根据 $(p \rightarrow)^n q$ 的定义知上述(Ⅵ)就是

(Ⅶ) $a_n \in a_n \rightarrow ((a_n \in a_n) \rightarrow)^{n-1} p$

由上述(Ⅴ)和(Ⅶ)，根据条件(2)得

(Ⅷ) $((a_n \in a_n) \rightarrow)^{n-1} p$

再由 $(p \rightarrow)^n q$ 的递归定义知上述(Ⅷ)就是

(Ⅸ) $a_n \in a_n \rightarrow ((a_n \in a_n) \rightarrow)^{n-2} p$

由上述(Ⅸ)与(Ⅴ)，根据条件(2)得

(Ⅹ) $((a_n \in a_n) \rightarrow)^{n-2} p$

如此往复若干次后，最终可得 p. 由于 p 是一个命题变元，可代以任何逻辑真值，所以这是一个悖论. □

如所知，构成Russell悖论的过程中所用的造集谓词为 $x \notin x$，令 f 表示假，读者可用真值计算验证 $x \notin x$ 与 $(x \in x) \rightarrow f$ 是等值的，从而上述定理1中构造之悖论，无非是将造集谓词 $(x \in x) \rightarrow f$ 扩张并改造为

$$(x \in x) \rightarrow ((x \in x) \rightarrow (\cdots((x \in x) \rightarrow p)\cdots))$$

亦即 $((x \in x) \rightarrow)^n p$，所以上述定理1中所构造的悖论也是Russell悖论的变形和推广.

Łukasiewicz的有穷值逻辑系统 $L_n (3 \leqslant n < \omega)$ 指的是命题逻辑真值取如下 n 个值：

$$0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \cdots, \frac{n-2}{n-1}, 1$$

并且 $p\to q$ 的真值为 $\min(1,1-p+q)$ 的逻辑系统，其中之 p、q 也用以表示命题 p、q 的真值. 现在我们用数学归纳法往证如下结论为真.

(*) $$(\alpha\to)^n\beta=\min(1,n(1-\alpha)+\beta)$$

证明 奠基：当 $n=1$ 时，因为 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 中规定 $p\to q=\min(1,1-p+q)=\min(1,1\cdot(1-p)+q)$，就是说应有 $(\alpha\to)^1\beta=\min(1,1\cdot(1-\alpha)+\beta)$，故定理成立.

归纳 现设已知 $(\alpha\to)^n\beta=\min(1,n(1-\alpha)+\beta)$，则要证 $(\alpha\to)^{n+1}\beta=\min(1,(n+1)(1-\alpha)+\beta)$. 事实上，我们有

(△) $$\begin{aligned}(\alpha\to)^{n+1}\beta&=\alpha\to(\alpha\to)^n\beta\\&=\min(1,1-\alpha+\min(1,n(1-\alpha)+\beta))\end{aligned}$$

当 $n(1-\alpha)+\beta\geqslant 1$ 时，由于 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，故 $1-\alpha\geqslant 0$，这表明

$$n(1-\alpha)+\beta+(1-\alpha)\geqslant n(1-\alpha)+\beta\geqslant 1.$$

因此即有

$$\begin{aligned}&\min(1,1-\alpha+\min(1,n(1-\alpha)+\beta))\\&\quad=\min(1,1-\alpha+1)=1\\&\min(1,(n+1)(1-\alpha)+\beta)\\&\quad=\min(1,n(1-\alpha)+\beta+(1-\alpha))=1\end{aligned}$$

由(△)即知

$$(\alpha\to)^{n+1}\beta=1=\min(1,(n+1)(1-\alpha)+\beta).$$

当 $n(1-\alpha)+\beta<1$ 时，则有

$$\begin{aligned}&\min(1,1-\alpha+\min(1,n(1-\alpha)+\beta))\\&\quad=\min(1,1-\alpha+n(1-\alpha)+\beta)\\&\quad=\min(1,(n+1)(1-\alpha)+\beta)\end{aligned}$$

同样由(△)可知

$$(\alpha\to)^{n+1}\beta=\min(1,(n+1)(1-\alpha)+\beta)$$ □

定理 2 在有穷值逻辑系统 $L_n(3\leqslant n<\omega)$ 中，规则 A_{n-1} 成立.

证明 若设 A_{n-1} 不成立，则有命题 α 和 β，使得 $(\alpha\to)^n\beta$ 为真，但 $(\alpha\to)^{n-1}\beta$ 不真，即 $(\alpha\to)^n\beta=1$，而 $(\alpha\to)^{n-1}\beta<1$. 于是由上文所证之结论(*)知有

$$(\alpha\to)^n\beta=\min(1,n(1-\alpha)+\beta),$$
$$(\alpha\to)^{n-1}\beta=\min(1,(n-1)(1-\alpha)+\beta).$$

由此而得

(1) $n(1-\alpha)+\beta\geqslant 1$,

(2) $(n-1)(1-\alpha)+\beta<1$.

由于 $1-\alpha\geqslant 0$，再由(2)知 $1-\beta>(n-1)(1-\alpha)\geqslant 0$，故有 $1-\beta>0$，即 $\beta<1$. 同理 $1-(n-1)(1-\alpha)>\beta\geqslant 0$，从而可有 $(n-1)(1-\alpha)<1$，即 $(1-\alpha)<\frac{1}{n-1}$，从而 $\alpha>\frac{n-2}{n-1}$，但在 $Ł_n(3\leqslant n<\omega)$ 中，比 $\frac{n-2}{n-1}$ 大的真值只有 1，故 $\alpha=1$，代入(1)式而有 $n(1-1)+\beta\geqslant 1$，即 $\beta\geqslant 1$，此与 $\beta<1$ 相矛盾. 故原设不真，故 A_{n-1} 成立. □

不难看出在 $Ł_n(3\leqslant n<\omega)$ 中，同一律 $p\rightarrow p$ 是成立的，因为按系统内关于蕴涵式 $p\rightarrow q$ 之真值计算规定，我们有

$$(p\rightarrow)^1 p=p\rightarrow p=\min(1,1-p+p)=1.$$

故 $Ł_n(3\leqslant n<\omega)$ 中有 $p\rightarrow p$，如此由 $Ł_n(3\leqslant n<\omega)$ 而配概括原则的话，就必然包含悖论. 因为此时首先由定理 2 知规则 A_n 成立，其次同一律 $p\rightarrow p$ 为真，又分离规则是对蕴涵词 $\rightarrow$ 的规定，即我们一开始就规定 $\rightarrow$ 是满足 $p,p\rightarrow q\vdash q$ 的逻辑联接词，再由所配的概括原则就可构造集合

$$a_n=\{x\mid((x\in x)\rightarrow)^n p\}.$$

如此即表示该系统已满足定理 1 中的全部条件，故由定理 1 知此系统内必定包含着悖论.

综上所论表明，如果在集合论的非逻辑公理系统中保留概括原则，把原来配套于集合论的二值逻辑系统改为 Łukasiewicz 有穷值逻辑系统 $Ł_n(3\leqslant n<\omega)$，仍然无法避免悖论的出现. 因而我们继续考虑这个问题，如果把配套的逻辑工具改为 Łukasiewicz 无穷值逻辑系统 $Ł_{\aleph_0}$ 或 $Ł_1$，情况又是如何？即能否避免悖论呢？下述定理了告诉我们无法依靠上文所论的办法来回答这个问题.

定理 3 在无穷值逻辑系统 $Ł_{\aleph_0}$ 中，对任何 n，逻辑规则 A_n 不成立.

证明 因为对于任意给定的 n，总可选取两个命题 x 和 y，使得它们的逻辑真值分别为 $x=\frac{n}{n+1}$ 和 $y=0$，因此我们有

(1) $n(1-x)+y=\frac{n}{n+1}<1$,

(2) $(n+1)(1-x)+y=1\geqslant 1$.

于是又有

$$\begin{aligned}(x\rightarrow)^n y&=\min(1,n(1-x)+y)\\&=\min\left(1,\frac{n}{n+1}\right)\\&=\frac{n}{n+1}<1\end{aligned}$$

$$(x\rightarrow)^{n+1}y=\min(1,(n+1)(1-x)+y)$$

$$= \min(1,1) = 1$$

这表示 $(x \rightarrow)^{m+1}y$ 为真，但 $(x \rightarrow)^{n}y$ 不真，故规则 A_n 在 $Ł_{\aleph_0}$ 中不成立. □

由上述定理 3 可知，概括原则配以 $Ł_{\aleph_0}$ 之后，不能满足前述定理 1 的全部条件，所以无法据此判定系统内是否出现悖论.

20 世纪 60 年代，曾有 Skolem，C. C. Chang(张辰中)，Fenstad 等学者进一步研究这类问题，先后证明了 Łukasiewicz 连续值逻辑系统 Ł(或记为 $Ł_I$) 配以几种特殊类型的概括原则公式集 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 后构成相容系统.

在这里，让我们对所谓概括原则公式集这一概念作一番解释. 如所知，在一阶逻辑中，概括原则不是一条公理，而是无穷多条公理，即为一公理模式. 实际上，给定一个造集谓词 p，就得到一条具体的概括原则，其形式表达式就是一个概括原则公式. 例如，我们令性质 p 为“集的子集”，那么 ZFC 系统中的幂集公理就是一条具体的概括原则，其形式表达式就是一个概括原则公式. 又如令性质 p 为“被一集之元素提名的对象”，如所知，ZFC 系统中的替换公理也是一条具体的概括原则，其形式表达式也是一个概括原则公式. 又 ZFC 系统中的划分公理亦是如此，当然，有如 ZFC 系统中的外延公理就不是什么具体的概括原则了，其形式表达式也不是什么概括原则公式了. 由于 Cantor 意义下的造集谓词可有无穷多，无疑概括原则公式也无穷多，我们把所说的一切概括原则公式汇集在一起构成一集，记为 Σ_0，那么 Σ_0 就是概括原则，在此意义下，也可把概括原则记为 Σ_0. 又我们可将概括原则形式化为如下的表达式：

$$\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_n \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow \varphi(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

若对其中出现之公式 φ 加以各种不同的限制，如不含量词，不含参数 x_1，$x_2, \cdots, x_n$ 等等，就会构成诸如上文所说的概括原则公式集 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 等等，由于它们都是在对公式 φ 作出不同限制后的产物，因而它们一方面互不相同，另一方面又都是 Σ_0 的真子集，即 $\Sigma_i \subset \Sigma_0 (i = 1,2,3)$. 如此任一 Σ_i 都已经对概括原则作了限制或修改. 所以 C. C. Chang 等学者先后证明 $Ł_I$ 配以 $\Sigma_i (i = 1,2,3)$ 能够相容，实与我们所要追求的问题相差一段距离，因为我们希望知道的是 $Ł_I$ 配以 Σ_0 之后能否相容. 然而问题不仅如此，即使我们能够证明 $Ł_I$ 配以 Σ_0 之后是相容的，然而一个系统要能发展数学，仅有一个 Σ_0 是不可能的，还要配以其他公理，那么再配以其他公理后是否还能保持相容性呢？下述事实表明不知可否，这个事实就是 C. C. Chang 所指出的，我们虽然证明了 Σ_2 或 Σ_3(注意还不是 Σ_0) 配以 $Ł_I$ 之后具有相容性，然而在该系统中再加进一条外延公理就不相容了. 总之，所有这些努力与我们所希望的一个目标还有较大距离，这个目标就

是构造一个集合论系统，其内涵较为丰富，能够发展整个数学，该系统中包括 Σ_0，并且配套的逻辑工具是 Łukasiewicz 的连续值逻辑系统或其他的无穷值逻辑系统. 当然，最根本的一条就是经过如此配套以后的系统是一个相容的系统. 试问这样一个目标能够实现吗？我们在 20 世纪 80 年代中期所做的一个工作，终于从反面回答了这个问题，如下述定理所示：

定理 任何一个数学系统 $\mathfrak{S}$，如果满足下列 5 个条件：

(1) 概括原则成立，

(2) 分离规则成立，即有 $p, p \rightarrow q \vdash q$，

(3) 同一律成立，即有 $p \rightarrow p$，

(4) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 皆为集合，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = A$ 为一集合，即承认无穷多个集合可以构造它们的并集，

(5) 包含一个自然数系统 $N = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，

则此数学系统必然包含悖论.

证明 由条件(1)可构造集合 $a_1 = \{x \mid (x \in x \rightarrow)^1 p\}$，$a_2 = \{x \mid (x \in x \rightarrow)^2 p\}$，$\cdots$，$a_n = \{x \mid (x \in x \rightarrow)^n p\}$，$\cdots$，此处 p 为一命题词，$(x \in x \rightarrow)^n p$ 是一种简记，其递归定义为 $(x \in x \rightarrow)^1 p$ 指 $x \in x \rightarrow p$，而 $(x \in x \rightarrow)^n p$ 指 $x \in x \rightarrow (x \in x \rightarrow)^{n-1} p$. 由条件(4)可知

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_n = a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n \cup \cdots = A$$

为一集合. 显然，由并集的定义可知

$$A = \{x \mid (x \in x \rightarrow)^n p, \text{对某个 } n\},$$

因此，我们有

$$x \in A \leftrightarrow (x \in x \rightarrow)^n p, \text{对某个 } n.$$

今以 A 取代 x 的出现而有

$$A \in A \leftrightarrow (A \in A \rightarrow)^n p, \text{对某个 } n.$$

由条件(3)知相同的谓词可以互相缠涵，故有

(Ⅰ) $A \in A \rightarrow (A \in A \rightarrow)^n p$，对某个 n.

(Ⅱ) $(A \in A \rightarrow)^n p \rightarrow A \in A$，对某个 n.

由条件(5)知上述(Ⅰ)表示存在一个自然数 $m \in N$，使有

(Ⅲ) $A \in A \rightarrow (A \in A \rightarrow)^m p$，

按 $(x \in x \rightarrow)^n p$ 简记的含义知上述(Ⅲ)就是

(Ⅳ) $(A \in A \rightarrow)^{m+1} p$，

显然，$m+1$ 还是一个自然数，所以上述(Ⅳ)也就是

(Ⅴ) $(A \in A \rightarrow)^n p$，对某个 n.

由上述(Ⅴ)和(Ⅱ),使用条件(2)可有

(Ⅵ) $A \in A$

再由上述(Ⅵ)和(Ⅲ),使用条件(2)可得

(Ⅶ) $(A \in A \to)^m p$

由 $(x \in x \to)^n p$ 之简记的含义知上述(Ⅶ)就是

(Ⅷ) $A \in A \to (A \in A \to)^{m-1} p$

由上述(Ⅷ)和(Ⅵ),使用条件(2)可有

(Ⅸ) $(A \in A \to)^{m-2} p$

再重复利用 $(x \in x \to)^n p$ 之简记的递归定义和条件(2),经有限次重复后,即可得到 p,由于 p 为一命题词,可任意赋予逻辑值,故必得承认在 $\mathfrak{S}$ 中包含悖论. □

如所知,整个精确性经典数学是被奠定在以二值逻辑为配套逻辑工具的近代公理集合论基础上的. 迄至目前为止,至少还没有找到比集合论更好的理论去作为现代数学的基础. 因而可以认为,任何一个内涵足够丰富的数学系统,总要奠定在一定的逻辑系统和集合论系统基础之上. 现在让我们来看上述定理中所需满足的各个条件,其中之条件(1)是概括原则,此乃争议之焦点,我们暂且不谈. 其中之条件(2)和(3)是两条逻辑规则,几乎可以说任何推理丰富有力的逻辑系统都要确认它们的,又其中之条件(4)和(5)是两条集合论的非逻辑公理,也可以说任何一个丰富而方便有用的集合论系统都会包括它们的. 例如,你能设想一个不包含自然数系统(条件(5))的集合论系统会产生内涵丰富的数学系统吗?如此看来,上述定理的结论实已证明了这样的事实:不论配套的逻辑工具是经典的二值逻辑,或者是非经典的 $n(3 \leqslant n < \omega)$ 值逻辑和无穷值逻辑系统,要想既能发展内涵足够丰富的数学,又在相应的集合论系统中保持概括原则是不可能的,因为在此等要求下,上述定理告诉我们,其中必然包含悖论. 至此可知,Бочвар 所设想之保留概括原则,仅仅依靠改二值逻辑为发展多值逻辑,并由此而给出悖论解释方法与发展数学是不能实现的.

上述定理及其相关的工作曾于1985年,在IEEE第15届国际多值逻辑学术会议上报告过,会议对这一工作的审稿意见中指出:"该文将莫绍揆的著名结果①从有穷推广到无穷,并且从 Lukasiewicz 一类逻辑系统推广到其他一切逻辑系统." 通常称莫绍揆在前文定理1与定理2中所给

① 莫绍揆的著名结果即指前文所述之定理1,2,3.

出的悖论为多值逻辑悖论或 $n(3 \leqslant n < \omega)$ 值悖论. 因此，也就相应地把上述定理中所给出的悖论叫做无穷值逻辑悖论.

如所知，我们曾在 3.1 节中对概括原则说过一段题外话，那就是对于当时普遍把概括原则视为引起悖论之祸根一事郑重提出过异议，现在看来，似乎应将这个郑重提出的异议收回了，因为本节之讨论结果似已表明不抛弃或修改概括原则是再没有别的出路了. 然而令人意外的是我们依然还为概括原则坚持我们的异议. 尽管概括原则兴许在经典数学范围内已经到了"山穷水尽疑无路"的地步了，但却并不排斥概括原则在非经典数学系统中依然存在"柳暗花明又一村"的可能.

最后，让我们分析讨论一下前文所述之定理 1 和上述定理中所要求之条件的异同之处，如所知，所不同者是在上述定理中以第(4)、(5)两条集合论原则取代了定理 1 中之逻辑规则 A_n，又如所知，逻辑规则 A_n 在定理 1 的证明过程中的作用是能使 $(p \rightarrow)^{n+1}q$ 无条件地降阶为 $(p \rightarrow)^n q$，然而不能令人满意的是规则 A_n 在 $Ł_{\aleph_0}$ 中不能成立(即前文定理 3)，从而陷入无法判定概括原则配以 $Ł_{\aleph_0}$ 后是否包含悖论的困境，因而在上述定理中以第(4)、(5)两条集合论原则取代定理 1 中之规则 A_n，此乃使我们既能保持所说的降阶作用又能摆脱所说之困境的关键所在.

3.4 悖论的成因与研究悖论的意义——Gödel 不完备性定理与悖论

如所知，Gödel 不完备性定理是数理逻辑发展史上的重大研究成果，曾被誉为"逻辑在现代所取得的最重要的进展之一"和"数学与逻辑发展史中的一个里程碑".[16] 但是，用 Gödel 自己的话来讲，他获得并证明这个定理是直接来自对 Russell 悖论的分析. 这就是说，不完备性定理的直观背景及其证明思想与悖论的分析有着密切的联系. 可见从方法论的角度来研究悖论问题，该有多么重要的意义.

Gödel 关于形式系统的不完备性定理首次发表在他的"论数学原理及有关系统中的不可判定命题"一文中，但这是关于不可判定命题存在性的一般结果，如果仅就算术系统而言(并经 Rosser 改进后)，不完备性定理可以简单地表示为：

定理　如果一个含有自然数论的形式系统 S 是无矛盾的，则在 S 中存在一个逻辑公式 A，使得在 S 中，A 是不能证明的，同时 $\neg A$ 也是不能

证明的.

作为不完备性定理之证明思想的一个关键之处在于映射思想的应用,"Gödel通过一种十分新颖的映射形式来建立他的主要结论."[46] 实际上,所说映射的基本思想就是借助一一对应,使得某一领域内的对象之间的某种关系得以在另一领域内的对象之间的关系得到表现,这是数学领域内的一种极为重要的研究方法.Gödel就用这种方法把算术系统(记为N)中的符号、表达式和表达式的序列都映射为数. 他通过引进Gödel数而实现了对象的数字化手续.这样一来,对于数理逻辑及其他有关分支来说,在研究方法上就提供了一种数字化的工具.从而方便地把一些讨论对象(如符号、公式)转换为自然数或自然数的函数.致使我们能用自然数函数的理论来讨论有关问题.其次,Gödel又通过递归函数的引进,证明了所有元理论中关于表达式的结构性质的命题,均可在算术系统中得到表示.如此,就使元理论中的命题都映射为算术系统中的命题,致使算术系统中的一部分表达式获得了元数学意义.

Gödel自己在阐明其证明思想时指出:"我们可以注意到一个形式系统的公式在形式上都表现为基本符号(变量、逻辑常项、括号或中断符号)的一个有限序列,而且人们容易精确地去指明基本符号的哪些有限序列是有意义的公式和哪些是没有意义的公式.类似地,从形式的观点看,所谓证明,实际上就是公式的一个有限序列.对于数学来说,究竟用什么东西来作为基本符号当然是没有关系的.我们不妨就用自然数来作为基本符号,如此,一个公式就是一个自然数的有限序列,而一个证明便是一个'有限的自然数序列'的有限序列.据此,元数学的概念(命题)也就变成了关于自然数或它们的序列的基本概念(命题),从而即可(至少是部分地)在(对象)系统本身的符号中得到表示,特别是人们可以证明'公式'、'证明'和'可证公式'等都可在对象系统中加以定义."[47]

对于Gödel不完备性定理的整个证明推理过程而言,Gödel自己指出:"这一推理过程与Richard悖论的相似之处是显然的,而且和强化了的说谎者悖论也存在有一个很大的相似性."[47]

Gödel不完备性定理具有深刻的数学和哲学意义,但其证明思想直接渊源于悖论的分析.可见从方法论的角度来看悖论问题的研究确有重要意义.

如所知,我们在2.2节中论及悖论之定义时曾指出:任何一个悖论都相对于某个理论体系.不妨进一步指出,任一悖论还属于一定的历史范畴,亦即它还相对于认识的各个历史阶段.例如,Hippasus悖论、

Galileo悖论、Berkeley悖论等等均已进入历史博物馆. 既然任何悖论都属于一定的历史范畴和一定的理论系统，也就不存在任何绝对意义下的悖论. 既然如此，也没有什么绝对意义下的产生悖论的终极原因，同时也不会有一个能在绝对意义下一劳永逸地免除悖论的方法. 但这又并不排斥我们能在认识论的意义下去揭示产生悖论的本质原因. 如所知，人的认识总具有历史的局限性和相对性. 因之，从认识论的角度来看产生悖论的本质原因，无非是人的认识与客观实际以及认识客观实际的方法与客观规律的矛盾. 这种直接和间接的矛盾在某一点上的集中表现就是悖论. 例如，Galileo悖论就表现为直接的主观认识与客观实际的矛盾. 特别有如Cantor用于造集的概括原则是认识世界的方法或手段，当前，一般认为产生Russell悖论的原因在于概括原则造集的任意性与生成集合之客观规则的非任意性之间的矛盾. 当然，我们认为对此还不能定论. 但是，不论今后如何定论，至多只是矛盾的具体内容有所不同，归根结底还将表现为认识世界的方法与客观规律之间的矛盾，这是一种间接的主客观矛盾. 但是，无论是直接的或间接的矛盾，从认识论的角度来说，归根结底是在一定历史阶段中，人的主观认识与客观实际之间的矛盾，而悖论就是这种矛盾在某些关节点上的集中表现.

如此，由于人的认识在各个历史阶段中的局限性和相对性，在人类认识的各个历史阶段所形成的各个理论体系中，本来就具有产生悖论的可能性. 但在人类认识世界的深化过程中，同样具备排除悖论的可能性和现实性. 人类认识世界的深化过程没有终结. 悖论的产生和排除也没有终结. 因之，在绝对意义下去寻求什么产生悖论的终极原因和创造什么解决悖论的终极方法都是不符合实际的.

悖论问题的研究，对于数学基础理论、逻辑学、语言学和哲学的研究都是有意义的. 试看语义学、类型论、多值逻辑及近代公理集合论的几个重要系统，直到数学基础诸流派的形成和发展，均与悖论问题的研究有关. 还有公理化方法、逻辑演算、证明论和模型论的形成和发展的原因，除了非欧几何的产生之外，也与悖论问题的研究相关. 如上文所述之Gödel不完备性定理的研究成果，其直观背景和证明思想也直接来自悖论的分析. 实际上，"现代逻辑中的许多最为深刻的成果，都从悖论的分析中产生."[48] Fraenkel说："作为近代基础理论研究的最有兴趣的发展之一，就是证明了这样一点，语义学悖论所代表的问题，不仅是那种与数学本身只有间接关系的方法论问题，而且也是对于数学有着巨大直接作用的研究的出发点."[22] Tarski说："必须强调的是：悖论在建立现代演绎

科学的基础中占有一个特别重要的地位，正像集合论的悖论，特别是Russell悖论成为逻辑和数学相容性形式化的起点一样，说谎者悖论及其他语义学悖论导致了理论语义学的发展."[49] 总而言之，今天来讨论和研究悖论问题，首先应该把18世纪以前那种认为悖论只是茶余酒后的闲谈之物的看法扫除，否则只能说明对数学基础和数理哲学的近代发展视而不见. 当然，话又要说回来，如果把研究悖论问题的意义及其重要性过分地夸张，或者强调到一个不适当的程度，这就既无必要也不符合实际.

第 4 章 数学基础诸流派

4.1 逻辑主义学派

逻辑主义学派的主要宗旨是把数学化归为逻辑. 亦就是说:"第一,数学的概念可以从逻辑的概念出发,经由明显的定义而获得;第二,数学的定理可以从逻辑的命题出发,经由逻辑的演绎而被推出."[50] 因此,全部数学都可以从逻辑的基本概念、公理和规则推导出来. 如此,数学就被化归为逻辑,逻辑与数学也就不能区分了. 因此,全部数学就可以奠定在逻辑的基础上,或者说逻辑就是整个数学的理论基础.

逻辑主义学派的主要代表人物是 Russell,还有 Frege 和 Whitehead,他们为贯彻逻辑主义纲领和实现逻辑主义宗旨作出了最大的努力.

其实把逻辑视为先于一切科学的观点,可以追溯到 Leibniz,但他本人只是提出了一些相关的重要思想,并没有具体展开这方面的工作. Leibniz 的这些思想直到 19 世纪才在 Dedekind、Frege、Peano 等人的工作中得到初步发挥. 应该说,逻辑主义的观点在 Frege 的工作中就基本形成. 因为 Frege 不仅明确地提出了数学可以化归为逻辑的想法,而且花费了将近 20 年的时间去努力将算术化归为逻辑,当然,他是否能彻底实现这一想法,那是另外一回事了,我们在下文中将会论及逻辑主义宗旨是否被实现一事. Frege 的重要成果还体现在他的两卷本巨著《算术的基本规律》(1893,1903)中,他在该著作中努力去实现从逻辑出发,逐步发展出除几何以外的一些主要数学理论.[51] 另外,Dedekind 也应该是逻辑主义的创始人之一,因为他在 1887 年发表的《数的性质与意义》一文中,明确提出了与 Russell 几乎完全相同的主张. 当然,主张是提出来了,却没有去作具体的展开. 只有在 Russell 和 Whitehead 那里,才把逻辑主义的主张详细而具体地加以发展,并且真正从相当少的公理和概念出发,推导出大部分数学.

为了弄清 Russell 的数学观,不妨先看一看 Russell 是沿着怎样的

道路去从事数学基础理论的研究工作的. 对此, Ruseell 在他的《数理哲学导论》一书中指出:"数学是这样的一种研究,它可以按两个方向去进行,一个比较熟悉的方向是建设性的,即不断增大理论的复杂性,…,另一个是不很熟悉的方向,这就是通过分析来达到越来越大的抽象性和逻辑简单性,这里所考虑的已不再是从怎样的假设出发,可定义或演绎出什么结果的问题,而是研究我们能否找到更为一般的思想原则,从这些思想原则出发,能使现在作为出发点的东西得以被定义或演绎出来."[37] Russell 此说实际上就是要为数学基础去挖掘更为一般的基础,也是为实现把数学化归为逻辑这个逻辑主义宗旨的根本原则.

从逻辑主义的形成和历史发展来看,逻辑主义的工作可以划分为数学理论的算术化和算术理论的逻辑化这样两个阶段.

19 世纪的最后 25 年,堪称为数学理论算术化的时期,许多出色的数学家都投入了这个工作. 不仅数学分析建基于实数论,几何也归约到了实数论. 1872 年, Weierstrass、Cantor 和 Dedekind 等人几乎同时完成了实数定义,但是无论是 Cantor 的收敛有理数序列,还是 Dedekind 的有理数分划,都表明了实数论被化归为有理数论,进而整数直至自然数系统,当然其中已借用了集合概念. 从而世所著称的 Peano 算术公理系统(详见本书 2.1 节之末)便成为这个数学理论算术化工作的终结. 人们从 Peano 系统出发,借助集合论概念,①便可建造算术、分析、几何直至整个数学大厦,因而这种数学理论算术化使得许多数学家感到满意,甚至认为无需再前进了. 但对逻辑主义者来说,这只是实现逻辑主义宗旨的第一步,要把数学化归为逻辑,更重要的是所谓算术理论逻辑化.

Frege、Whitehead 和 Russell 曾为借助于纯逻辑概念去定义 Peano 系统中的基本概念,并借助于纯逻辑公理和规则去演绎推导出 Peano 系统中的各条公理等等付出了巨大的劳动. 特别是 Russell 的努力,集中地体现在他与 Whitehead 合著的三大卷巨著《数学原理》(1910～1913)中。他们从命题演算和谓词演算开始,然后通过一元和二元命题函项定义了类和关系的概念,建立了抽象的类演算和关系演算,并由此出发,用连续定义和证明的方式引出了数学(主要是算术)中的主要概念和定理[51]. 但就逻辑主义宗旨而言,他们还是未能实现. 他们实质上是以集合论为基

① 关于如何从集合概念出发,用构造性方法去建立 Peano 系统,详见文献[9]的 4.1 节,其中定理 4.1.3表明 Peano 系统之 5 条公理均为集合论中之可证定理,并此由而完成了把算术理论奠定在集合论基础之上的工程.

础，并按照分支类型论的原则去展开和推演全部数学的(下文即将进一步具体论及这一点). 但 Russell 当时却认为他们已经完成了算术理论逻辑化的工作，进而认为逻辑主义的宗旨已经实现. 正如 Russell 所说，"我们发现在这里(指《数学原理》一书)没有一个地方能作出明确的分界线，使得逻辑在其左方，数学在其右方，如果还有人不承认逻辑和数学的同一性，我们就请他来证明，《数学原理》中的那些定义和演绎可看成是逻辑的终点和数学的起点."[3] "从逻辑中展开纯数学的工作，已经由 Whitehead 和我在《数学原理》一书中详细地做出来了."[52] Russell 还进一步指出："它们(指逻辑与数学)的不同，就像儿童和成人的不同，逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代."[5] 其实，事情并没有这么简单，经过仔细分析，普遍认为 Whitehead 和 Russell 并没有在《数学原理》一书中实现逻辑主义的宗旨，Russell 如上的种种说法实际上没有充分根据，为什么？下文即将指出或回答这个问题.

为什么普遍认为 Russell 和 Whitehead 没有能在《数学原理》一书中实现逻辑主义宗旨呢？因为人们首先在《数学原理》一书中清楚地看到，在他们从"逻辑"出发推导数学命题的过程中使用了集合论的公理，即使用了无穷公理和选择公理. 事实上，没有无穷公理，连自然数系统都无法构造，更谈不上全部数学了. 又若没有选择公理，则数学中的合理内容要砍掉一大块. 如所知，当时人们已经引进了所谓初等公理系统与高等公理系统等概念，凡是必须借助无穷公理的系统称为高等的. 而算术与几何理论均属高等公理系统，因而不可能不借助于无穷公理. 事实上，Russell 和 Whitehead 都知道在他们的这一工作中借助了无穷公理和选择公理，现在的问题是这两条公理究竟算不算逻辑公理？这首先要牵涉到什么是逻辑的问题. 按照人们对于逻辑的一般理解，普遍认为纯粹逻辑只涉及形式而不涉及具体事实，亦即"作为逻辑法则，只允许讨论可能性对象，而不允许在逻辑法则中作出某物是否存在的断言."[50] 然而无穷公理和选择公理恰恰都是存在性公理，事实上，存在一个集合正是陈述这两条公理时的必然判断，所以普遍认为它们不是逻辑公理. 既然一开始就借助了非逻辑公理，怎能说全部数学命题均是由逻辑概念和逻辑规则演绎出来的呢？所以 Frege 在晚年已倾向于放弃逻辑主义的立场. 至于 Russell 自己，其实心里也应该是明白的，因为他们在使用无穷公理时已经显得很勉强. 正如 Fraenkel 所说："他们是很勉强地走这一步的."[22] "Frege 和 Russell 的理论的严重缺陷在于对无穷公理的使用而令人怀疑的状况."[22] 王浩也指出："正是由于要借助严格的逻辑概念来给出'无

限'的一个充分根据这一困难,才使得 Russell 关于数学与逻辑相等价的理论成为可疑."[23]因此,明摆的事实迫使 Russell 和他的合作者对此设法补救,其补救办法是把所有要用到这两条公理之一才能证明的命题一律改写为条件式命题,亦即不把这两条公理列入原始的公理系统,但当某个数学命题 P 必须借助无穷公理才能证明时,就把命题 P 陈述为"如果无穷公理真,则 P 成立"等等,因而就认为这两条公理变成了诸如此类的每一条定理的前提,而不再是特设的公理了.此等补救办法的勉强性应该说是显然的.后来 Carnap 又曾建议采用"坐标语言"而废除"名称语言"的办法补救之,在他看来,只要这样做了,则无穷公理就可以认为是关于"位置"而不是关于事实的断言,而位置则可能是空的.然而无论是 Russell 的条件式命题还是 Carnap 的坐标语言,普遍认为这些都是牵强的做法,也就难以取得大多数数学家的支持了,只有少数人认为已经实现了逻辑主义宗旨.

另一方面,问题的复杂性还远不止这些,大家知道,要从逻辑导出全部数学,势必要导致集合论的展开,而集合论本身自相矛盾的盖子正是以著名的 Russell 悖论揭开的,但逻辑是不允许有矛盾的,所以集合论中的悖论必须排除,Russell 借以排除悖论的方案是引进"恶性循环原则"而发展他的分支类型论,但是这个分支类型论不仅显得复杂而繁琐,更严重的是由此而不能实现逻辑主义宗旨.因为如 3.2 节中所论及的那样,恶性循环原则是直接排斥狭义非直谓定义法的,而狭义非直谓定义法的禁止使用,将导致抛弃许多合理的数学概念和命题.因此,在 Russell 面前有两条路,或者放弃恶性循环原则,从而也就拆除了防止悖论泛滥的 Russell 式的堤防,或者坚持恶性循环原则,从面也就无法实现逻辑主义的主张.无疑地,这两条路都不是 Russell 所愿意走的.他终于在无路可走的情况下找出一条虚假的小路,那就是 Russell 为此而增加了一条可化归公理,也叫做还原公理或可归纳化公理,该公理说任何(广义)公式都可以和一个直谓(广义)公式相等价,因此每个非直谓性质就总有一个直谓性质与之等价.从而任一类中较高一级的性质也就可化归为同一类中较低级的性质,以此递推,就把类中之分级全部取消了.亦即可化归公理的实质就是导致任何级的性质或集合都被还原为直谓的,从而就等于取消了分支类型论,所剩下的也就是没有恶性循环原则的简单类型论了.所以人们稍加分析,就发现"可化归公理的精神与恶性循环原则相冲突,引入可化归公理后,实质上便是取消恶性循环原则."[24]因而人们议论纷纷,可化归公理一时成为人们批评《数学原理》之众矢之的.

普遍认为，可化归公理过于人为而不自明，其作用无非是把分支类型论约化为 Ramsey 的简单类型论，所以大多数人宁可直接采用简单类型论而不愿在可化归的虚假小道上绕弯路. Russell 最终也只好放弃可化归公理，却又抓住恶性循环原则不放，也就在实质上放弃了逻辑主义的主张. 但 Russell 直到晚年才承认："我所一直寻找的数学中的光辉的确定性在令人困惑的迷宫中丧失了."[54]"寻求完美、最终和确定性的希望破灭了."[54]

关于逻辑主义学派的无穷观，由于逻辑主义学派的基本立场是确认全部数学的有效性，并要把全部数学化归为逻辑，因此，既要确认全部数学的有效性，也就势必要确认实无限观点下的无限集理论. 从而就无穷观而言，逻辑主义学派是实无限论者，亦即确认实无限性研究对象在数学领域中的合理性. 普遍认为，"Russell 及其追随者明显地承认无限性对象的存在性."[55]但由于 Russell 为排除集合论的悖论而发展他的分支类型论，从而在 Russell 系统中的实无限性对象就在不同的类和级中表现为一定的层次结构. 这是符合反映论者的看法的.

综上所述，逻辑主义宗旨的实现不仅困难重重，Russell 的方案也实在问题百出，只好以失败告终. 其根本原因在于只看到且过分夸张了数学与逻辑在演绎结构上的同一性，完全抹杀了数学与逻辑科学的差异性. 但是，我们切切不能由于逻辑主义的失败而认为他们的工作一无是处或毫无价值. 相反地，应当看到逻辑主义学派的工作对数学与逻辑的发展作出了重要贡献，其贡献归纳起来有如下几点：

(1) Russell 的分支类型论，特别是后来经由 Ramsey 改进并发展起来的简单类型论，对于悖论的研究和避免具有重要意义. 而且现有的一些取得一定成效的解决悖论的方案，也都渊源于 Russell 早年提出的见解.

(2) 逻辑主义者已相当成功地把经典数学纳入了一个统一的公理系统，虽然这个系统不是纯逻辑的，但这样一个工作却成为公理化方法在近代发展中的一个重要起点.

(3) 由于逻辑主义学派的工作，基本上完成了从传统逻辑到数理逻辑的过渡演变. 特别是 Frege、Peirce、Schriöder 等率先引进了量词，并对量词的性质作了深刻研究. Frege 还进一步给出了命题演算和谓词演算系统. 而 Russell 和 Whitehead 合著的《数学原理》被誉为"总结过去数学基础之研究成果，并由它宣告数理逻辑已经充分成熟的划时代巨著."[52]并且逻辑主义学派的工作"代表了一个第一流的学术运动，这是对人类

思维力的美妙的巨大贡献."[?]

4.2 直觉主义学派

直觉主义学派认为,集合论悖论的出现不是一个偶然事件,它是整个数学所感染之疾病的一种征兆,因此,悖论问题不可能通过对已有数学作某些技术性的修改或限制而得以解决,必须依据可信任的要求对已有的数学作全面审查,而且应该毫不犹豫地放弃那些不符合可信性要求的数学概念和方法.因此,"认识论上的可信性就唯一地决定了直觉主义的前提."[29]直觉主义者 Heyting 说:"当你们通过公理和演绎进行思维时,我们则借助于可信性进行思维,这就是全部区别."[58]那么,什么样的数学概念和方法才算是符合直觉主义的可信性标准呢?这个标准就是直觉主义的著名口号:"存在必须被构造."亦即数学中的概念和方法都必须是构造性的.所谓概念和方法上的构造性,就是按固定方式经有限个步骤能够定义的概念和能够实现的方法,构造性亦称能行性,构造性方法亦称能行性方法.例如,求两个正整数 a 和 b 的最大公约数,可用 Euclid 除法在有限步骤内实现,像这类方法就称为能行的或构造性的方法.

直觉主义学派的主要代表人物是 Brouwer,还有 Heyting 和 Weyl.

直觉主义学派与逻辑主义学派相反,他们认为逻辑不在数学之前,数学的概念和原则不能归结为逻辑的概念和原则,相反认为逻辑是数学活动的结果,逻辑需要数学作为它的基本构造,亦即视逻辑为数学的一部分.直觉主义者明确指出:"逻辑并不是我们站立的基地,事实上,它不过是一种具有特殊的一般性的数学定理,亦即逻辑只是数学的一个部分,而决不能作为数学的基础."[58]直觉主义学派在数学上的出发点也不是集合论,而是自然数论.这就是 Heyting 所说的:"数学开始于自然数及自然数相等概念形成之后."[58]围绕着自然数论的可信性问题,直觉主义者指出:自然数来源于 Brouwer 的"原始直觉"或"对象对偶直觉".所谓对象对偶直觉,即所谓人皆有之的一种能力,即某一时刻集中注意力于某一对象,紧接着又集中注意力于另一对象,这就形成了一个原始对偶,以(1,2)来表示它,有了这个原始的对偶对象,便可根据构造性的要求重复一次而产生(2,3),再重复一次便是(3,4),依次递推下去,则任何一个自然数都能从这个对象对偶直觉开始,用构造性的方法把它产生出

来. 直觉主义者认为，只有建立在这种原始直觉和可构造性之上的数学才是可信的，而这种原始直觉“对于思想来说是如此直接，其结果又是如此清楚，以致不再需要任何别的什么基础”. [58]

在哲学观点上，直觉主义学派是唯心论者. Heyting 明确指出：“如果把直觉主义的断言看成是关于事实的断言，那将是一种武断，因为它并不具有这种意义.”[58] “直觉主义的推论不是关于事实的推论，而是一种理智的构造.”[58] “我的数学思想属于我个人的理智生活，并限于我个人的思想，数学思想的特性在于它并不传达外部世界的真理，而只是与心智的构造有关.”[58] 所以直觉主义者的所谓原始直觉和由此开始的构造，用他们自己的话来说，乃是一种内省直觉能力的发挥. 如果立足于直觉主义学派的总的哲学观点，则 Brouwer 自己指出：“我们可以在 Kant 那里找到直觉主义的一种古老的形式.”[59] 但 Brouwer 却自称为新直觉主义者，因为他“放弃了 Kant 关于空间的先验性，而更坚持关于时间的绝对先验性.”[59] 事实上，Brouwer 所说的原始直觉，就是 Kant 关于时间的直觉，而 Brouwer 关于自然数源渊于原始直觉的提法也就是 Kant 关于自然数是从时间直觉中推演出来的主张. 但在 Kant 那里，除掉时间直觉以外，还有关于空间的直觉，几何理论则产生于空间直觉. 在 Brouwer 那里，除了原始直觉以外，不再需要任何别的纯粹直观. 因为一旦有了这个原始直觉，往后的一切就可由此开始去构造了.

直觉主义学派也有它本身的历史发展过程，如果单纯着眼于无穷观，则直觉主义学派的思想一直可以追溯到古代，因为从“存在必须被构造”这一前提出发，势必导致彻底的潜无限观念，而历史上第一次明确地只承认潜无限而反对实无限的是 Aristotle，如所知，Aristotle 这种无穷观也是往后数学领域中一切潜无限论者的基本观点.

直觉主义学派在数学上的直接先驱者乃是 Kronecker，因为他明确提出并强调了能行性，主张没有能行性就不得承认它的存在性. 在无穷观上，他又是实无限概念的激烈攻击者，他与 Cantor 进行了长期的、针锋相对的争论（关于 Kronecker 对 Cantor 实无限论的攻击，请参阅文献[9]中 1.2 节的相关内容）. Kronecker 还计划要把数学算术化，并在数学领域中清除一切非构造性成分及其根源. Poincaré 也是直觉主义观点在数学上的先驱者，因为他主张自然数是最基本的直观，无需再作进一步的分析就可以认为是可信的，Poincaré 也曾多次批评完成了的无穷集合观念，并主张潜无限观念，他也不赞成形式化的研究方法，但是 Poincaré 却始终没有把这种倾向加以总结而上升为一种观点. 另外，法国的半直

觉主义者也为直觉主义学派的形成作了直接的准备，因为他们在批评选择公理的同时强调了能行性，当然，只有在 Brouwer 那里，才完整而彻底地从哲学和数学两个方面贯彻和发展了存在必须被构造的观点. 所以大家就公推他为直觉主义学派的奠基者和代表人物了.

直觉主义学派在数学工作中的基本立场是：

第一，在无穷观的问题上，坚持潜无限而排斥实无限.

第二，否认传统逻辑的普遍有效性，而重建直觉主义逻辑规则.

第三，批判古典数学，拆除一切非构造性数学框架，重建直觉主义的构造性数学.

根据直觉主义学派的基本观点，势必导致对实无限概念的排斥，因为从生成的观点来看任何一个无穷集合或实无限性对象都是不可构造的. 若以最简单的自然数集合为例，按照能行性的要求，必然否定自然数全体这个概念，因为任何有穷多个步骤都不能把所有的自然数构造出来，更不能在构造性原则下去谈汇成整体了. 而且即使先假设有那么一个全体自然数构成的论域摆在那里的话，直觉主义者也不能承认对全体自然数可以逐一复查完毕的，即不能接受走遍自然数论域这个概念的. 在他们看来，自然数 1，2，3，…，只能永远处于不断地被构造的延伸状态中. 例如，直觉主义者 Weyl 明确指出："Brouwer 使这一点明确了，就是没有任何证据能够证明所有自然数的整体的存在性，…，自然数列，它能够通过不断地达到下一个数而超越任何一个已经达到的界线，从而也就开辟了通向无限的可能性，但它永远停留于创造和生成的状态之中，而绝不是一个存在于自身之中的事物的封闭领域."[60] 由此可见，在无穷观的问题上，直觉主义学派是十分彻底地采纳了潜无限论者的观点. 这和实无限论者对自然数全体的认识与理解是完全不同的. 实无限论者不仅完全肯定自然数全体这一概念，并据反映论观点作出实际的解释. 实无限论的反映论派认为，人类对自然数无穷序列的认识是经过了几个不同等级的抽象才完成的；第一是由具体事物到自然数概念，这是一级抽象. 第二是由具体的自然数到一般的自然数 n，这是二级抽象. 第三是从任意有限多个自然数到自然数全体，这是三级抽象. 而人们之所以能完成这些等级的抽象过程，主要是因为思维能够反映事物在质变过程中的飞跃. 在这里便是具体反映了从延伸到穷竭、有限到无限或者限量到质的转化. 今借助于如下的实际考察，对于自然数全体的概念是很直观的. 如图 2.1 所示：设某物 P 沿箭头所示方向，以每秒一个单位的速度从 1 处向 0 处移动. 这从现实的位移运动观点来看，P 是完全可以实现从 1 到 0 的

位移运动的，它首先以$\frac{1}{2}$秒时间从1移到$\frac{1}{2}$处，在$\frac{2}{3}$秒时间后就经过了$\frac{1}{3}$处，而在$\frac{3}{4}$秒时间后经过了$\frac{1}{4}$处，以此类推，总共用了1秒钟时间，P就由1移到了0. 而P在这一秒钟时间里就经过了$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，其分母也就走遍了全体自然数而使之汇成一个整体. 所以从实无限的反映论派观点来看，自然数全体这一概念是能够接受的，其中关键的一步是能否承认思维对延伸到穷竭这一飞跃的正确反映. 但从构造性观点出发，就必然否认思维对于飞跃的能动反映. 在这一点上，大致所有的潜无限论者都是如此.

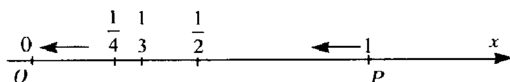


图 2.1

现在讨论直觉主义学派的逻辑观. 直觉主义者出于存在必须被构造的考虑，认为必须批判传统逻辑的普遍有效性. Brouwer 认为古典逻辑是从有穷性对象中抽象出来的，不能无限制地使用到无限性对象上去，悖论就出在无穷上. Brouwer 指出："人们把逻辑误认为是某种超越和先于全部数学的东西，并且不加检验地把它应用到关于无穷集合的数学."[29] Brouwer 在这里说了两件事：其一是传统的逻辑规则不应该无条件地应用于无限性论域上，其二正如前文中已经论及的那样，认为逻辑先于数学的看法实是一种错误的见解. 所以直觉主义学派从构造性观点出发，构造了他们自己的逻辑，这是一种与传统逻辑大异其趣的逻辑，一般地说，"这种不同之处主要表现在否定性质的推理上."[58] 现让我们对此作一番具体的分析讨论.

(Ⅰ) 排中律

设 S 表示一个无穷论域，则实无限论者认为 S 是一个既经完成了的无穷总体. 因之，建立在实无限论观点上的经典数学便认为 S 是一个既经构造完成的封闭域，从而能把 S 的全部元素(论域中的个体)逐一检验完毕，也就是我们在数学演绎推理中常说的"走遍 S 的一切元"等等. 然而直觉主义学派既然认为任何无穷都只处在无止境的构造中，不是已经构造完成了的封闭域，从而绝不承认能把所有某类具有性质 p 的无穷个体域中之个体逐一检验完毕. 所以直觉主义学派不允许将排中律 $p\vee\neg p$ 使用到任何无穷集合上，亦即只承认排中律在有穷集合上的有效性. 例

如，直觉主义者认为能对$\{1,2,\cdots,n\}$下结论："每个自然数或者是偶数，或者是奇数(不是偶数)."但不能对全体自然数$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$下这个结论，因为对有限多个自然数而言，我们能给出一个能行的过程，在有限步骤内把这有限多个自然数一一检验完毕，但对全体自然数来说，按照构造性观点就只能做到哪里算到哪里，下一步情况如何，等做出来之后再说，因而在下一步还没有检验之前，我们是不能对它作出什么结论(如奇数或是偶数之类)的. 由于这种一步一步地检验对无穷多个对象来说是永远做不完的，所以也不可能存在一个能行的过程能在有限步之内将所有的自然数遍查完毕，以致能对所有自然数断言"每个自然数要么是偶数，要么是奇数". 所以根据构造性的观点，将排中律应用到一切自然数所构成之整体上是无效的.

今设N表示全体自然数构成的集合：

$$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$

又以N'表示任意有穷多个自然数构成的集合：

$$\{1,2,3,\cdots,n\}.$$

现在直觉主义者说："排中律只能用在N'上，排中律不允许用在N上." 那么我们要问直觉主义者，结论"排中律不允许用在N上"，其中实已隐含着承认N这个对象的存在性，因为人们是不可能对根本不存在的东西去说什么的，亦即首先要承认N的存在，才会去说"排中律不可用到N上"这一类话的，但又如所知，直觉主义者根据构造性观点，一开始就不能承认N的存在性，因而直觉主义者在此陷入了既承认N存在又不承认N存在的矛盾. 然而直觉主义者对此声称：如果大家都不承认N的存在性，我们当然无需去说"排中律不允许用到N上去"这一类多余的话，但是有些人还是在说N是存在的，这本来已经是一个错误，如果再将排中律使用到N上去，则是错上加错了，因此我们在这里不过是提醒那些承认N存在的人，千万不要一错再错. 这表明直觉主义者并未由此陷入困境.

直觉主义者又明确指出，所谓一个命题是真的，指的是存在一个能行的过程在有限步骤内已经证明了该命题是真的. 一个命题是假的，也是指已经能行地证明了该命题为假. 然而事实上存在着大量的数学命题，既没有能行地证其为真，也没有能行地证其为假. 对于这些未证命题，如果为数有限而且只是时间问题，证一个少一个，那么时间一到总能知道它们的真假. 但是直觉主义者认为是否只是时间问题，这是根本不知道的，而且从历史的经验来看，未证命题根本不是证一个少一个，而是

越证越多，一个多年未决之难题的解决，往往带来一批未证命题. 因此，直觉主义者更认为，排中律“命题A或命题¬A必有一真”是不能承认的. 根据构造性观点只能是证一个算一个，证到哪里算到哪里，如果无条件承认命题A或命题¬A必有一真的话，这就等于承认了所有命题总能构造性地证其为真或证其为假. 这在直觉主义者看来是没有可信性根据的. 这就是Brouwer所说的：“承认排中律实际上就等于承认对每个数学命题都能证其为真或证其为假.”[21] Heyting也指出：“由Brouwer的基本观点，即研究心智的数学构造而不涉及被构造对象的性质，这就立即导致了对排中律的拒绝.”[58] 但在经典数学中，由于承认排中律，所以一个命题无论能不能或是不是已证其真或假，该命题要么为真，要么为假，两者必居其一. 直觉主义则不然.

最后还应指出，直觉主义者不认为排中律假，因为在他们看来，若设排中律为假，即有$\neg(A\vee\neg A)$，于是由Demorgen律推知$\neg A\wedge\neg\neg A$，而这就是$B\wedge\neg B$，从而与无矛盾律$\neg(B\wedge\neg B)$相矛盾了. 所以直觉主义者不说排中律为假，而只说排中律不能普遍使用，或说对排中律的使用要作特定的限制.

(Ⅱ) 反证律

直觉主义者认为，欲证命题A为假，可设A为真，然后给出一个能行的过程，在有限步骤内引出矛盾，从而结论命题A为假，亦即在能行地导致矛盾的要求下承认如下的归缪律：

$$(\neg_{+})\Gamma, A\vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma\vdash\neg A.$$

但是对于一个命题A的肯定式，如果使用演绎推理中的反证法来证其为真，则不为直觉主义者所接受，亦即尽管在能行地导致矛盾的要求下，直觉主义者也不承认如下的反证律：

$$(\neg)\Gamma, \neg A\vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma\vdash A.$$

因为直觉主义者从构造性要求出发，所谓一个命题是真的，指的是存在一个能行的过程，在有限步骤内证明了该命题为真. 在这里，仅仅是能行地在有限步骤内引出矛盾，这和能行地证其为真是根本不同的两回事. 但是直觉主义者并不排斥归缪律$(\neg_{+})$. 因为反证律是用以证明某物的存在性，而存在必须被构造，能行地导致矛盾不等于某物已被构造. 而归缪律$(\neg_{+})$是证明某物不存在，既然设其存在能够能行地导致矛盾，那也就等于能行地证其为假(不存在)了. 总之，直觉主义者认为$(\neg)$这样的推理要求太强，不符合构造性要求，因而不能无条件接受；$(\neg_{+})$要求较弱，可以接受. 从逻辑的角度来看，反证律$(\neg)$与归缪律$(\neg_{+})$有些相似，

但两者不同，对此我们曾于文献[8]中2.2节中指出过了.

历史地说，从直觉主义者 Heyting 开始，一些学者设法减弱反证律(¬)而构造出各种不同的逻辑演算. 以致有此说法，凡是承认反证律(¬)的逻辑演算称为古典逻辑演算，而那些不承认反证律(¬)的逻辑演算都叫做非古典逻辑演算. 由于各人对反证律(¬)所主张之减弱程度的不同而构造出各种强弱程度不同的非古典逻辑演算.[61]

如所知，命题逻辑之自然推理系统 P^N 中配套于其形式语言 La 的推理工具是下述12条形式推理规则：

$(\in)\ A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

$(\tau)\ \Gamma \vdash \Delta (\Delta \neq \varnothing) \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$

$(\tau_0)\ \vdash A \Rightarrow \Delta \vdash A$

$(\neg)\ \Gamma, \neg A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash A$

$(\to_-)\ A \to B, A \vdash B$

$(\to_+)\ \Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$

$(\wedge_-)\ A \wedge B \vdash A, B$

$(\wedge_+)\ A, B \vdash A \wedge B$

$(\vee_-)\ A \vdash C, B \vdash C \Rightarrow A \vee B \vdash C$

$(\vee_+)\ A \vdash A \vee B; B \vee A$

$(\leftrightarrow_-)\ A \leftrightarrow B, A \vdash B$

$\qquad A \leftrightarrow B, B \vdash A$

$(\leftrightarrow_+)\ \Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, B \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A \leftrightarrow B$

显然，P^N 是上文所说之古典逻辑，因为 P^N 承认反证律(¬). 又如所知，在 P^N 中有如下两条形式定理：

定理(A)　$\Gamma, A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash \neg A$，此即$(\neg_+)$.

定理(B)　$A, \neg A \vdash B$，记为(C_+).

现将 P^N 中的反证律去掉，保留其余11条形式推理规则，再将上述$(\neg_+)$作为公理或形式推理规则引入，从而构成一个新的形式系统，记为 P^M，通常称为极小系统，即极小系统 P^M 中配套于其形式语言 La 的推理工具是$(\in)$、(τ)、(τ_0)、$(\neg_+)$、$(\to_-)$、$(\to_+)$、$(\wedge_-)$、$(\wedge_+)$、$(\vee_-)$、$(\vee_+)$、$(\leftrightarrow_-)$、$(\leftrightarrow_+)$等12条形式推理规则，正如文献[8]中2.2节所指出的那样，反证律(¬)在 P^M 中不可能成为可证之形式定理. 所以按上文所说，P^M 是一种非古典逻辑演算.

现若将上述定理(B)，即(C_+)作为公理或形式推理规则引入到 P^M 中去，则又构成一个新的形式系统，记为 P^H，并以直觉主义者 Heyting 的

名字命名，即称为 Heyting 系统，故 Heyting 系统 P^H 中配套于其形式语言 La 的推理工具是 $(\in)$、(τ)、(τ_0)、$(\neg)$、(C_-)、$(\to_-)$、$(\to_+)$、$(\wedge_-)$、$(\wedge_+)$、$(\vee_-)$、$(\vee_+)$、$(\leftrightarrow_-)$、$(\leftrightarrow_+)$ 等 13 条形式推理规则. 同样地，反证律 $(\neg)$ 在 P^H 中也不可能成为可证之形式定理，另外，(C_-) 也不是 P^M 的形式定理，所以我们有

$$(\Gamma \vdash A) \in P^M \to (\Gamma \vdash A) \in P^H \to (\Gamma \vdash A) \in P^N,$$

这表明在 P^N、P^H、P^M 三者中，自然推理系统 P^N 最强，极小系统 P^M 最弱，Heyting 系统 P^H 较弱. 又如所知，排中律在 P^N 中是一条可证的形式定理，即在 P^N 中有如下的形式定理：

定理(C) $\vdash A \vee \neg A$，记为(E_-).

但是上述(E_-)却不是 P^M 和 P^H 的形式定理，现将(E_-)作为一条公理或形式推理规则引入到 P^H 中去，因而构成一个新的形式系统，记为 P^{HN}，亦即 P^{HN} 系统中配套于其形式语言 La 的推理工具是 $(\in)$、(τ)、(τ_0)、$(\neg)$、(C_-)、(E_-)、$(\to_-)$、$(\to_+)$、$(\wedge_-)$、$(\wedge_+)$、$(\vee_-)$、$(\vee_+)$、$(\leftrightarrow_-)$、$(\leftrightarrow_+)$ 等 14 条形式推理规则. 可以证明自然推理系统 P^N 与上述形式系统 P^{HN} 是互相等价的，亦即我们有

$$(\Gamma \vdash A) \in P^N \Leftrightarrow (\Gamma \vdash A) \in P^{HN}.$$

如此看来，自然推理系统 P^N 和 Heyting 直觉主义系统 P^H 的关系是 P^N 比 P^H 多了一条排中律. 而排中律对于直觉主义者来说，乃是不允许无限制地使用的. 由此可见，直觉主义者对反证律$(\neg)$的减弱和对排中律在使用上的限制是一致的. 限于本书的性质，不宜对上文所论之各个形式系统之间的关系作具体的形式论证，对此有兴趣的读者可参阅文献[61]中 1.12 节和文献[8]中 2.2 节的相关内容. 最后还应指出，对于上文所论之命题逻辑 P^M 和 P^H 的构造，可以完全类同地扩展到谓词逻辑中，即可类同地构造谓词逻辑 F^N 的极小系统 F^M 与 Heyting 系统 F^H.

(Ⅲ) 量词

由于直觉主义学派强调能行性，对于量词的解释和理解也要贯彻可构造性. 例如，对于表达式 $\exists XA(X)$ 而言，直觉主义者虽也读为“存在 X 使 $A(X)$ 成立”，但基于构造性观点，此言指的是有一个能行的过程，在有限步骤内找到了那个使得 $A(X)$ 成立的 X，否则不能算是直觉主义观点下的“存在 X 使 $A(X)$ 成立”. 如此，直觉主义者对于下述形式推理

$$(*) \quad \neg \exists XA(X) \vdash B, \neg B \to \exists XA(X)$$

是根本不承认的. 因为仅由“没有 X 使 $A(X)$ 成立而导致矛盾”这一点，并没有能行地找到那个使 $A(X)$ 成立的 X，所以直觉主义者不能接受上

述形式推理(*). 另外,直觉主义者也不承认下述形式推理

$$(*)' \quad \neg \forall X A(X) \vdash \exists X \neg A(X)$$

是普遍有效的. 因为直觉主义者不承认能对无限论域中之所有个体逐一检验完毕,所以"不是所有的 X 使得 A(X) 成立"这个结论,对于能行意义下的"有 X 使得¬A(X) 成立"而言,只是一句空话,因为所说结论没有给出能行地找到使¬A(X) 成立之 X 的方法. 又若你是在已经能行地找出使¬A(X)成立之 X 之后才说¬∀XA(X)的话,则直觉主义者就要请你直接说 ∃X¬A(X),而不必再说¬∀XA(X)一类多余的话了. 所以对于传统逻辑中的下述形式推理关系

$$\neg \forall X A(X) \dashv\vdash \exists X \neg A(X)$$

而言,直觉主义学派只承认其中的

$$\exists X \neg A(X) \vdash \neg \forall X A(X)$$

而不承认其中的

$$\neg \forall X A(X) \vdash \exists X \neg A(X)$$

即拒绝接受上文所说之形式推理(*)′.

直觉主义学派基于构造性观点,势必排斥古典数学中的非构造性数学. 现先举例说明非构造性观点与构造性观点处理问题时的思想方法的不同之处.

例如,让我们考虑圆周率的十进位无尽小数表示式

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,79\cdots$$

令 $f(n)$ 表示第 n 位小数前出现数字 5 的次数,如 $f(3)=0, f(4)=1, f(8)=2, f(10)=3, \cdots$.

试问不等式 $\frac{f(n)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ 是否对每个自然数 n 都成立?对此问题而言,直觉主义学派认为在他们的构造性数学中根本不能回答,而古典数学学派在非构造性观点下,认为答案要么肯定,要么否定,两者必居其一.

古典数学对该问题的处理方法是:

(1)π 有一个确定的解析表达式,π 的十进位无尽小数表示式是有意义的.

(2)$\{\frac{f(n)}{n}\}$ 构成一个有界的无穷数集,其中 $0 \leqslant \frac{f(n)}{n} < 1$,而 $n=1, 2, 3, \cdots$

(3) 根据 Dedekind 割切原理,有界无穷数集 $\{\frac{f(n)}{n}\}$ 必有确定的上确界 $\sup\{\frac{f(n)}{n}\} = \beta, \beta \leqslant 1$.

(4) 将 β 与 $\frac{1}{2}$ 作一比较，根据三分律可知，$\beta > \frac{1}{2}$ 与 $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ 两者中有且仅有一式成立.

(5) 因此问题的答案要么被肯定，要么被否定，即当 $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ 时被肯定，当 $\beta > \frac{1}{2}$ 时被否定.

按照直觉主义学派的构造性思想方法，对于以上之推理过程根本不能接受. 直觉主义者首先对于 π 被表示为上述十进位无尽小数展开式是不接受的，他们对于 π 的使用是用到哪一位展开到哪一位，而计算到哪一位就算是展开到哪一位，根本不承认有什么 π 的解析表达式；其次，直觉主义者也不承认什么完成了的有界数集 $\{\frac{f(n)}{n}\}$，因为自然数 n 都只能在永无止境地被构造变程中，$\frac{f(n)}{n}$ 当然也只能在无止境地被构造中，至于 $\sup\left\{\frac{f(n)}{n}\right\}=\beta$ 的存在性更是违背构造性要求的怪物，按照构造性观点，对于 $\frac{f(n)}{n}$ 的验算，也只能算到哪一步把话说到哪一步. 所以要对所有的自然数来问 $\frac{f(n)}{n} \leqslant \frac{1}{2}$ 是否成立？直觉主义者拒绝回答.

又如所知，数学分析中是用反证法去证明下述关于连续函数之中间值定理的.

定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，并且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在一点 $c(a<c<b)$，使得 $f(c)=0$.

由于这种反证法的证明过程并没有给出一个能行过程，以使能在有限步骤内确认点 c 的存在性，因而是一种非构造性证明，直觉主义者认为这种证明是无效的.

今以直觉主义分析学为例，探讨一下直觉主义学派如何建立他们的直觉主义数学. 如所知，古典分析建基于实数连续统，因此，建造直觉主义分析学的根本问题是如何建立构造性意义下的实数与实数连续统概念. 为此，直觉主义者首先引进所谓"属种"(species)这个概念，借以取代 Cantor 意义下的集合概念. 例如，只要能给出一组确切的、能为有限句逻辑上无矛盾的语句所表述的规则 L，根据 L 就能把每一个自然数一个接一个地、无止境地构造出来这就算是给出了一个关于自然数的属种. 进一步，Brouwer 又引进了"选择序列"的概念，："在任何时刻，一个选择序列 α 是由一个有穷的节连同对它的延伸的若干限制所组成的."[62]

如此，直觉主义者便以"有理数选择序列"取代古典分析中之有理数Cauchy序列概念，并称之曰"实数生成子". 相应于古典分析中把实数定义为有理数Cauchy序列等价类，可构造意义下的单个实数被定义为实数生成子的一个等价属种. 因此，直觉主义者建立构造性实数概念似乎没有实质性的困难，其原因在于Cauchy Weierstrass的整个极限理论建基于潜无限观念，因而在实质上，直觉主义者在这里不过是在能行性的要求下重述Cauchy序列而已. 就是说，在相应的陈述下，对于任给$\varepsilon>0$，必须强调能够能行地找到一个$\delta>0$，而不是非构造性地存在一个$\delta>0$等等.

建造直觉主义分析学的真正困难还在于"构造性连续统"概念的建立. 原因在于可构造性至多是潜无限，因而无限只有一个层次，但实数却有不可数多个，对于可数无穷来说，乃是两个不同层次的无穷. 因此问题不单是以潜无限取代实无限一事，而是要把高层次的无穷统一到低层次的无穷上去. Heyting对此指出："如所周知，递归实数没有穷尽连续统，递归实数是可数，而连续统是不可数的，Brouwer曾尝试找一个尽可能与普通的连续统相接近的构造性概念. 他为这个问题奋斗终生，在他的1907年的学位论文中，他引入连续统作为初始概念，因为人有连续统的一个直观(时间直观)，靠它就能构造一稠密的、可数无穷的标尺，连续统上的一个点是用这标尺的点的一致收敛序列定义的."[62] 但是Brouwer一旦借助于时间的直观而提出"连续统也是原始直觉'的说法，这就显然违背了直觉主义者的基本立场，以致陷入自相矛盾的境地. 直到1919年，Brouwer终于利用"展形"(spread)概念巧妙地建造了符合构造性要求的连续统概念. 其中关键的一步在于不再是先实数后连续统，而是把每一个实数和连续统同时统一在一个潜无限的构造性状态之中. 为使直观图像简单明白起见，我们把展形连续统意译为如下一个通俗易懂的展形图像，并在解释中采用二进位记数法.

不妨把下述图2.2所示的这个展形连续统理解为一棵永远在生长着的树，其生长规则是先由树根长出两枝，每枝长到一有限长时又各生出两枝，以此类推，永无止境地长下去，每一个长出分枝之处称为"节"，又把每个"节"生出的两枝的"节"合起来叫做一个"节对"，于是除掉树根的那个节之外，每个节都在一个节对中，现把每个节对中的一个节记为0，另一个记为1，不允许同时记为0或同时记为1，0与1称为节的标记. 这样，从任何一个节到它紧接的下一个节就有且仅有0或1两种选择的可能，我们把树根以下的一个节开始一个接着一个节生长下去的变程

称为此展形树的一个分支.如果把任一分支中从第一个节的标记依次记录下来,便形成一个可构造意义下的实数二进表示式.反过来,任给一个可构造意义下的实数二进表示式,那么按照上述方法,必能在此展形树上找出一个分支,它的依次相接之节的标记构成这个可构造实数二进表示式.在这里要注意的是,可构造实数二进表示式的位数虽然可以无止境地增多,但却总是通向无限的一个初始片段,而不是真正的无限,并且只能给到哪一位算到哪一位,因而完全不同于古典分析中实无限意义下的实数二进表示式的含义.

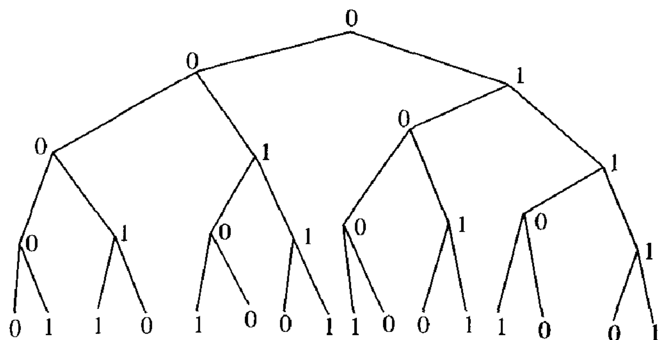


图 2.2

如此,直觉主义意义下的单个实数就既不是在连续统生成之前,也不是在连续统生成之后一个一个地被构造出来,而是在构造性地构造连续统的同时构造性地构造每一个实数.反之,在构造性地构造每个实数的同时也在构造性地构造连续统.从而直觉主义意义下的连续统本身与每个直觉主义意义下的实数同时处在能行的、潜无限的构造状态中.这就真正建造了直觉主义意义下的构造性实数连续统,即所谓展形连续统.展形是直觉主义数学中的一个抽象概念,有它广泛的普遍性.Heyting 指出:"展形是用一个确定对选择限制的规定来限制的."[62] 所以如上所论之展形实数连续统只是借助于展形概念所建造的一个具体展形的实例.而直觉主义连续统一旦建成,就完全改变了古典分析实数论的面貌,直觉主义分析学就能在这个基础上建造起来了.

普遍认为直觉主义学派的观点和方法,本来也是出于解决悖论问题的考虑,然而限制过大,只承认一部分最保险的数学,被抛弃的合理因素太多.但联系到计算机数学的发展,构造性观点和方法却有重要意义.详言之,通常有如下几点评论:

(1) 能行性问题具有十分重大的现实意义,正如世所公认的那样,

在使用电子计算机时,尤其不能不注意能行性.

(2) 直觉主义学派对非构造性数学和传统逻辑持绝对排斥的观点是错误的,也是十分违背客观实践的,尤其不能解释非构造性数学在一定范围内的应用上的有效性. 在这一点上,直觉主义学派理所当然地遭到了绝大多数数学家的反对.

(3) 直觉主义学派对实无限概念的绝对排斥也不符合科学认识论原则,而且"直觉主义学派否定了关于无穷过程的大部分推理(不论是经典的或是 Cantor 学派的)的有效性. 如果这一派得势的话,那么大部分数学领域内的研究活动就会遇到不可克服的困难. 幸好他们没有得势."[6]

(4)"直觉主义因反对古典逻辑,从而需要把整个逻辑及数学全盘改造,连人们日常认为最简单、最明白无讹的部分也需重新审查,这显然是一件非常艰巨的工程. 再由于直觉主义逻辑强调能行性,反变得噜苏、不方便起来,从而这个数学改造运动极慢,几乎可以肯定难以成功."[21]

4.3 历史的误解

通常认为形式主义学派的主要代表人物是 Hilbert,其实这是一种历史的误解. 形式主义学派的主张和 Hilbert 的数学观并不相同,如果查阅 Hilbert 全集,也不会发现他在什么地方发表过与形式主义学派完全相同的主张,更不会发现他在什么场合表示过他是形式主义者,连 Hilbert 的学生 Bernays 也不同意把 Hilbert 列为形式主义学派的人物. 特别是形式主义者 Curry 曾明确指出:"现在有许多人把形式主义与应称为 Hilbert 主义互相等同起来,这是不对的."[61]可见把 Hilbert 的数学观与形式主义数学观画等号是不正确的,因而把 Hilbert 作为形式主义学派的主要代表人物之说就更有问题. 为什么会造成这样的历史误解,主要是因为绝大多数形式主义者"都奉 Hilbert 为祖师".[21]时间一长,大家就习惯于此说了. 那么形式主义学派的主要代表人物应该是谁呢? 倒也一时说不清楚,也可能既有 Hilbert 大师在前,谁都只好让位. 但有一点是大家知道的,有如 Curry、Robinson、Cohen 等学者均自称是形式主义者. 基于这样的实际情况,我们就不能如流行的说法那样去笼统地讨论形式主义学派了,而应把 Hilbert 主义学派与形式主义学派的基本主张分别讨论之,借以阐明两个学派之间的异同和关系.

4.4 Hilbert 主义学派

Hilbert 在数学基础问题上的基本观点是:"(A)只要有一线希望,我们就将对那些卓有成效的概念结构和推理方法进行仔细研究,并对此予以培育、加强而使之有用.任何人都不能把我们从 Cantor 为我们所建造的天堂里驱赶出去.(B)必须对推理建立起与普通初等数论同样的可靠性,对于初等数论是没有人怀疑过的,在那里,矛盾和悖论只能由于不小心而产生."[3] 由此可见,Hilbert 的基本主张是:一方面希望保存古典数学的基本概念和古典逻辑的推理原则,特别是那些与实无限性有关的概念和方法,有如无穷集合的概念和排中律在无限集上的使用等等.但在另一方面,Hilbert 同样出于可信性的考虑,对这些实无限性概念和方法的使用又顾虑重重,几乎和直觉主义者一样地认为可信性只存在于有限之中,无限则是不可靠的,这一有穷主义观点终于贯彻在(下文即将解释之)Hilbert 的元理论的推理规则中.因此,Hilbert 基于要在有穷主义可信性的考虑中保存实无限观点下的古典数学和传统逻辑,不得不把全部数学划分为具有真实意义的"真实数学"和不具有真实意义的"理想数学".把那些与实无限相关的概念和方法作为理想的概念和方法纳入数学领域.并希望通过有穷主义的构造性方法,在元理论的研究中证明理想数学的相容性,以使实无限性的理想成分在应用上的有效性与上述有穷性立场获得统一.这就是 Kriesel 所说的:"Hilbert 是从有限性观点出发去理解超穷方法之应用的."[6]

在陈述和讨论 Hilbert 规划和 Hilbert 的元数学过程中,需要对数学系统的形式化、公理化、相对相容性证明和直接相容性证明等概念有所了解.对于数学系统的形式化,我们在文献[8]中绪论第2节论述过,并在该书中构造过许多形式系统,读者不妨参阅之.至于公理化及相容性证明等概念,则在本书1.5节、1.6节、1.7节中有过详细讨论.如所知,正如本书1.6节和2.3节中所论及的那样,如果集合论之相容性所处的这种危机不能解脱,那么由 Лобачевский 几何系统开始所搞的一系列相对相容性证明就要全部落空,所以 Hilbert 主张搞数学系统的直接的相容性证明,他为此而提出了一套规划,人们称之曰 Hilbert 规划,又该规划也正是 Hilbert 主义的主要组成部分.而 Hilbert 的元数学理论(即证明论)正是为了实现 Hilbert 规划而建立的一整套数学理论.其基本思想是这样:Hilbert 认为,"我们必须着眼于把整个系统作为研究对

象，这就大大有别于以往的研究方法，有别于以往的着眼点。这种研究叫做元数学的研究。被研究的数学理论叫做对象理论，用以研究的、作为研究工具的那个理论叫做元理论。所获得的定理，有关整个数学理论之性质的定理（当然和数学中的定理有别，后者只是关于数的性质的定理）叫做元定理。例如，我们想证明定理：'整个数学理论是相容的，不是互相矛盾的。'这便是一条元定理（因为它是有关整个数学理论之性质的定理），它不是数学理论内的定理（因为它不是关于数的性质的定理）。"[24] 对此，有兴趣的读者还可参阅文献[8]中绪论的第 1 节和第 2 节，在第 1 节中提到了证明论这个数理逻辑之重要分支在原来意义下的涵义，第 2 节中论及了关于形式系统的元定理和形式系统内的形式定理，还有元语言和对象语言之区分等等。这些都有助于我们理解 Hilbert 建立证明论（即元数学理论）的基本思想。

Hilbert 规划的主要内容是：

(i)证明古典数学的每个分支都可以公理化。①

(ii)证明每一个这样的系统都是完备的，即任一系统内的可表命题均可在系统内得到判定。

(iii)证明每个这样的系统都是相容的。

(iv)证明每个这样的系统所相应之模型都是同构的。

(v)寻找这样一种方法，借助于它，可以在有限步骤内判定任一命题的可证明性。

如上(i)～(v)统称为 Hilbert 规划，也是 Hilbert 用以实现 Hilbert 主义的方案，Hilbert 又为实施这个规划而创立证明论，即元数学理论。正因为元数学理论着眼于整个形式系统，并以证明本身作为研究对象，因之才被称为证明论，其主要内容是：

(i)′列举出数学和逻辑中所使用的一切符号。

(ii)′明确地刻画出所有那些代表有意义的命题的符号组合，并称之为公式。

(iii)′提供这样一种构造程序，它能使我们依次地去构造出所有那些相应于可证命题的公式，这种程序称为证明。

(iv)′证明这里所说的证明不会导致错误，即证明对于那些相应于可用有穷方法来判定之命题的公式来说，当且仅当这种命题为真时，相应的公式才能用上述(iii)′所描述的方法加以证明。

---

① 这里所说的公理化，指的就是如同本书第 1.5 节中所论及的那种公理化概念。

稍加分析对照，读者就会看出上述(i)′、(ii)′、(iii)′实际上就是讲的数学系统的形式化(对此读者要参阅文献[8]绪论第 2 节的相关内容). 这种形式化对于证明论本身的目标是很重要的，因为只有实现了这样的形式化，才能使理论的逻辑结构得到充分的暴露，从而才能对证明本身去进行研究. 另外，Hilbert 经过研究并证明下述结论：

(＊)上述(iv)中关于证明"证明"的正确性等价于对数学系统的相容性证明.

根据上述结论(＊)可知，归根结底还是如何用构造性方法去证明系统的相容性. 特别还要强调指出的是："Hilbert 提出有穷性观点，作为元理论内的推理依据."[24]如此，在 Hilbert 那里，我们可看到以下述三种数学系统.

(A)非形式化的数学系统：也就是通常用自然语言加上一些数学符号描述的素朴的数学系统，记为 G. 在 G 中允许使用古典逻辑推理规则，排中律允许使用于无穷集合等等.

(B)形式化的数学系统：这是那些被形式化了的形式系统，记为 H. H 中的那些形式符号、公理或推理规则等等都是形式的，它们在未加解释之前都是没有内容和意义的，经过解释之后便是 G 中相应的内容，亦即 G 是 H 的模型，H 是 G 的形式化.

(C)元数学系统：这是用于研究形式系统 H 的直觉主义系统，记为 K. 亦即 K 是用以研究 H 的元理论，在 K 中所有的推理规则都必须保持有穷主义、直觉主义的可信性. 例如，不能涉及无穷，不允许排中律用到无穷集合上去等等.

总体来说，Hilbert 的具体方案，就是先把非形式化的数学系统 G 加以形式化，使之成为形式化的数学系统 H，然后通过元数学系统 K 中的规则、方法和理论去证明形式系统 H 的相容性，再用形式系统的 H 的相容性来说明它(H)的模型(G)的相容性. 而在用以研究和证明形式系统 H 的相容性等等的元数学理论 K 中的推理方式，必须保持有穷主义的构造性，不得涉及无穷集合等等.

综上所述，Hilbert 主义学派的无穷观，应该是理想数学中的实无限论者、元数学理论中的有穷主义者. 但在 Hilbert 那里，真理性最终还是只存在于有限性之中. 因此，本质上还是对无限性对象采取了排斥的态度. Hilbert 认为："就像无穷小的运算已被有限范围内的运算所代替一样，…，建立在无限之上的推理方法也必须用有限过程来代替，…，这才是我的理论之目的."[34]所以"Hilbert 是希望从有限的判断中去排除超

穷概念之应用的."[5] 因此,形象地说,如果视形式系统为幕,则 Hilbert 便是幕前的实无限论者,因为他视无限集理论为天堂,但 Hilbert 在幕后却是有穷主义者,因为他视无限性对象为无真实意义并且超越可信性之外的东西,从而他在元数学理论的推理中就彻底地和 Brouwer 站在一起了.此时再看 Hilbert 视无限集为天堂的说法就是虚假的了.这就不能不使我们回想起 Hilbert 在一次著名的讲演中所说过的几句话:"没有任何问题能象无限那样,从来就深深地触动着人们的情感,没有任何观念能像无限那样,曾如此卓有成效地激励着人们的理智,也没有任何概念能像无限那样,如此迫切地需要加以澄清."[31]

一般说来,人们对于 Hilbert 主义学派的评论,可以归结为如下几点:

(1)如果从认识论的角度来考虑,则一般认为数学中的无限性概念是对现实世界中之无限原型的能动反映,因此,Hilbert 把所有涉及无限的概念和方法都视为无真实意义的观点是不科学的,亦即从根本上歪曲了数学和真实世界的关系.

(2)Hilbert 在他的规划中提出要证明每一个这样的系统都是完备的.但 Gödel 不完备性定理(详见 3.4 节)指出:即使把初等数论形式化之后,在这个形式演绎系统中,也总可找出一个可表且合理的命题来,在系统内无法证其为真,也无法证其为假.所以 Gödel 不完备性定理从理论上论述了 Hilbert 规划不能实现.不仅如此,由 Gödel 不完备性定理还可推知:"对任一有穷的公理化的形式系统来说,都不可能有这样的关于系统的无矛盾性的证明存在,它可以在系统内得到表述."[66] 这就直接打击了 Hilbert 关于用有限方法证明系统无矛盾性的设想,亦即我们只能凭借更强的而且在系统内不能表述的方法去证明系统的无矛盾性.因而显然这种证明的意义是不大的,因为我们首先要把理论分成对象理论和元理论,对象理论也许是既复杂而又有疑问,因而希望能证明它的相容性,但用以证明这一点的元理论应该是简明而可信的,也只有这样才有意义.然而 Gödel 却证明了只能凭借更强的且在系统内不能表述的方法才能去证明对象理论的相容性,亦即用以证明对象理论相容的元理论势必比该对象理论更为复杂可疑,所以这种证明的意义是不大的.总之,Gödel 已从理论上推断了 Hilbert 规划是行不通的.

(3)虽然 Hilbert 规划行不通,而且 Hilbert 关于理论的相容性的有穷性证明这样一个主要目标也无法实现.但他为实现这些目标而创立和发展起来的证明论及其思想原则却有重大意义.亦即 Hilbert 为了摘直

接相容性证明而把整个系统作为研究对象这一思想非常重要. 正因为证明论立足于这样一个高度，才能使人们不再囿于系统内部，而能站在系统之上来对它进行研究，而这一研究由此而获得许多重大成果，上文所述之 Gödel 不完备性定理便是一例. 又如法国的 Bourbaki 学派所发展起来的结构主义，也是立足于这一高度研究问题的结果，因为结构主义之主要目标，就在于想通过对各个具体数学理论之结构分析来揭示整个数学理论的结构. 所以同样是立足于整个系统之上的研究成果.

(4) Hilbert 所倡导的数学系统的形式化研究方法，只要不像下文将要论及的形式主义学派那样走向极端，则形式化方法无疑是一种有重要意义的研究方法. 这也正是 Engels 所倡导的："为了能够在纯粹的形态中去研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关紧要的东西放在一边. "[67]

(5) 不论 Hilbert 最后的立足点如何，他曾面对 Brouwer 向古典数学发出的挑战进行了激烈的斗争，力争保存古典数学，并且声称 Cantor 的无限集理论为天堂或乐园等等，无疑是受到绝大多数数学家的欢迎的.

4.5　形式主义学派

形式主义学派之数学观的核心思想是：

(i) 无论是逻辑的或数学的公理系统，其中的基本概念和公理都是些毫无意义的符号. 正如形式主义者 Curry 所指出的："形式主义者关于数学的定义是这样的，数学是关于形式系统的科学. "[68] 形式主义者 Cohen 更认为："数学只是一种纯粹的在纸上的符号游戏. "[69]

(ii) 数学的真理性等价于数学系统的相容性. 因此，"无矛盾性在形式主义者那里便成为对于数学的唯一要求. "[46] 当然，现代形式主义学派又基于进一步考虑形式系统的有效性和简洁性等等而派生出实用形式主义学派，并且区别于那种以相容性为唯一要求的纯粹形式主义观点，一般认为 Cohen 是纯粹形式主义者，而 Curry 是实用形式主义者.

形式主义观点的形成和发展，一方面来自 Hilbert 规划和形式化研究方法走向极端；另一方面也导源于非欧几何的出现而引起的关于数学真理性的争论，当时由于两种互相矛盾的几何系统得以互为相对相容，引出了关于数学真理性究竟体现在何处的问题. 有些人就认为，几何的

真理性只在于如果这些公理是真的，那么由它演绎出来的定理成立这样的蕴涵式，如此等等，说法不一．而形式主义者在这场争论中所形成的基本观点，就是几何的真理性体现在几何系统的无矛盾性上．

关于形式主义学派的代表人物是谁的问题，文献[51]的条目"形式主义"中指出："Hilbert 通常被看作是形式主义的代表人物，但这是不妥当的．…，形式主义的真正代表人物实际上是 Robinson 和 Cohen．"[51]

可以认为，形式主义学派的无穷观和 Hilbert 的无穷观很接近，或者说形式主义学派基本上继承了 Hilbert 的无穷观．在这里又不能不牵涉到形式主义学派与现代 Plato 主义学派关于数学实无限性在 Plato 哲学意义上的实在性的争论．现代 Plato 主义者是承认那种具有任意大基数的超穷集合在哲学意义上的实在性的，只要它们能通过适当的公理予以定义，因而和（基本上继承了 Hilbert 之无穷观的）形式主义者的无穷观是不同的．

顺便指出，现代 Plato 主义者有 Bernays 和 Gödel 等，Bernays 指出："Plato 主义是这样的一种倾向，它把数学对象与它所反映的客体之间的一切联系都加以切断，并赋予它们以一种 Plato 哲学意义上的实在性．"[7] 这就是说，数学对象存在于一个 Plato 式的理念世界中，而这个理念世界完全独立于人们的认识而存在，而数学命题之所以为真，只是因为它陈述了这个理念世界中的真实情况．应当指出：Gödel 在这里与 Bernays 还是有分歧的，Gödel 曾指出："对我来说，那种关于数学对象的存在性的假定是和关于物理对象的假定同样合法的，有同样的理由相信它们的存在性．"[36] 故 Gödel 也有实在论者之称．

人们对形式主义学派的一般评论如下：

（1）一般认为，数学的真理性仅表现在数学系统无矛盾性的观点是不足取的．固然真理不应该有矛盾，但不自相矛盾的未必一定是真理．反过来，如微积分的理论基础打了几百年，无限集理论一开始就陷入了矛盾，恰恰都是在不相容之中发展壮大的，所以不能把相容性视为真理性的唯一标准．

（2）公理化与形式化研究方法的出现本来是一种进步，但把形式化的高度抽象引向极端，片面夸大，直至视数学理论为符号的游戏的观点也是不足取的，亦即"庸俗的形式主义就反对在数学的任何部分放进客观内容，而从他们自己的假定出发，就必然地反对历史上确定的那些数学领域的重要性及其内容．"[63] "一个关于无意义的符号的游戏，如何能对物理世界的过程具有内在的重要关系呢？"[63]

4.6 关于 Hilbert 主义学派与形式主义学派的数学真理观

关于形式主义学派与 Hilbert 主义学派的区别和联系，还要着重指出如下两点：

(1) 自 Brouwer 开始至今，一种颇为流行的误解依然存在，即认为 Hilbert 也和形式主义者一样地把真理归结为系统的相容性，而且也因此而对 Hilbert 加以批评和指责，其实这种批评和指责正好不在点子上，而且是没有根据的. 因为 Hilbert 的基本观点之一就是把全部数学划分为有真实意义的"真实数学"和没有真实意义的"理想数学"，既然如此，在 Hilbert 那里，理想数学的相容性证明也就只是相容性证明而已，不会因此而给理想数学增添任何真理性. 在这一点上，Hilbert 与形式主义学派是不同的. 须知，Hilbert 的数学真理性只存在于有限性之中，因此对 Hilbert 数学真理观的批评不应与形式主义数学真理观纠缠在一起.

(2) 在我们明确区分了 Hilbert 的形式化研究方法和由此走向极端的形式主义观点后，我们却又要指出：Hilbert 也曾有过片面强调形式的倾向. 例如他曾说过："数学思考的对象就是符号本身，符号是这个思考的本质，它们不再代替理想化的物理对象."[17] 但 Hilbert"绝不是一个狂热的和彻底的形式主义者."[65]

第 5 章　关于模糊数学的理论基础问题

5.1　模糊性与模糊数学

如所知，模糊数学是 20 世纪 60 年代，由美国著名的控制论专家 Zadeh 创立并发展起来的一个新兴数学分支. 现在，无论在理论研究方面，还是在应用研究方面，模糊数学都已取得了长足的发展. 模糊集合论、模糊拓扑、模糊测度等等名词在数学文献中已屡见不鲜；模糊控制、模糊决策、模糊评判等方法也已为各部门专业人员所经常使用；又模糊洗衣机、模糊空调之类的家用电器更是早已面世，并与传统电器产品争夺市场. 总之，模糊数学 30 年来发展迅速，已经不再是它刚刚诞生之际那样，被某些传统数学家拒之于数学家族门外，并为自己能争得一席之地而四方呼吁了. 既然如此，为何还要提出："模糊数学之理论基础"这种问题呢？可能有人认为，模糊数学既在理论上获得了深刻的发展，又有广泛的应用成果，难道它的基础还不牢固吗？至今还去讨论什么模糊数学的奠基问题，是否已属多此一举. 须知数学可以先长树枝，并且开花结果，然后再回过头去扎根，或者说数学可以先构作"空中楼阁"，然后再去打牢地基，这也可认为是数学学科发展的一大特色. 数学史上这种情况可说举不胜举. 例如，本书 2.3 节中所论及之微积分的奠基问题便是如此. 如所知，18 世纪的微积分，在天文学、力学、物理学和工程科学等各个学科中的应用都取得了巨大成功，但在当时连什么是无穷小都说不清，更谈不上什么微积分的理论基础了，直到 19 世纪，Cauchy 和 Weierstrass 等才把微积分奠定在极限论的基础上，亦即直到那时才给微积分找到一个合理的基础. 模糊数学也是一样，虽然它已在各个方面都取得了长足的发展，但其理论基础究竟是什么？却至今没有一个统一的认识. 本书的前面四章讨论的是精确性经典数学之理论基础问题，而在本章中，我们将专门讨论一下模糊数学(或称非经典数学)的理论基础问题，这对于了解和认识模糊数学的发展将是有益的.

数学是从量的侧面去探索和研究客观世界的一门科学. 数学有精确

性的特点，这种认识也由来已久．天际中行星的位置可借助于数学公式计算出来，定向爆破中的泥石，可借助数学方程设计的要求被抛洒到指定地点．因此，一讲到“量”，似乎就意味着精确和准确．“定量分析”是针对不精确的“定性分析”而言的．如此看来，数学似乎从来就是与精确相伴，而与模糊无缘的．这样的认识不仅由来已久，而且随着精确性数学在各方面的应用所取得的巨大成功而日益强化，以致人们在任何地方使用数学工具时，总是首先想到如何将自身之各种概念和关系精确化和严密化，对于那些一时难以精确化的学科或领域而言，似乎统统难以成为数学的用武之地的异域．

其实，量性概念并不总是精确的，诸如多、少、高、低、快、慢…也都是刻画事物之量的侧面的量性概念，而这些量性概念之不精确性是显然的，指着一堆物品，何谓多，何谓少，谁能精确地划个界线？有一个古昔相传的悖论：因为从一大堆砂子中取走一粒砂子，仍不失其为一大堆砂子，这是一个大家都可接受的命题，不妨记为(*)．现在我们就不断地、一粒一粒地从这一大堆砂子中取走砂子，并且反复运用上述命题(*)，那么，即使一直取到只剩下几粒砂子的时候，根据命题(*)可知，这仍然是一大堆砂子，然而这却明显与事实不符．故为一悖论．这就和本书2.2节开头所论及的那样，公理和推理过程看上去是合理的，但推理的结论却又违背客观实际，但要注意的是：尽管刚才所说的取砂子悖论与古代的Zeno悖论同属这种意义下的一类悖论，但是Zeno悖论与取砂子悖论在性质上又大异其趣，两者不可等同视之．所说的取砂子悖论还可这样那样地变形，其中“秃头悖论”便是著名一例，因为一个人拔掉一根或长出一根头发是不会改变这个人是或不是秃头这一事实的，这也是一个可公认的命题．于是，对于一个头发长得非常浓密的人来说，他当然不是秃头，现在我们就在这个人头上一根一根地拔头发，那么根据所说的命题，即使拔到他头上只剩3根头发，甚或全部拔光，根据所说的命题，他依然不是秃头．从推理的角度看，推理过程没有问题，但推理结果却违背客观事实，故为一悖论．但这种悖论的性质又与Zeno悖论不同，这里的问题并不涉及无穷级数求和之类的命题．那么，这里的问题出在什么地方？其根本原因在于像“一大堆”、“很多”、“很少”、“秃头”(即“头发很少”)等等刻画事物之量的侧面的概念本身具有模糊性，但我们在上文所论之命题和推理过程中，却把这些具有模糊性的量性对象一如既往地当作精确性量性对象那样地去处理了．实际上，诸如“一大堆”和“秃”这类概念是界限不分明的．你能规定不少于一万粒砂子是一大堆，那么九千九百九

十九粒呢？就不能称为一大堆了？这显然是说不通的。你能说一个人头上有 20 000 根头发不算秃头，那 19 900 根头发又如何？亦即多少粒算一大堆，多少粒不是一大堆，又多少根头发不算秃头，多少根头发算秃头，这些都是说不清的，或者说没有一个分明的界限.

既然模糊的量性对象是客观存在的，那么过去的精确性经典数学为什么认为量性对象总是精确的呢？其实这是认识上的一种历史局限，或是一种故意地视而不见，因为一旦涉及模糊的量性对象，许多判断不好叙述，许多推理难于进行，直至许多结果不能明确，以致一幅精确完整的数学绘画变得支离破碎，但这是大家所不愿看到的，所以干脆就把模糊量性对象拒之于经典数学的大门之外.

其实，纵观数学历史的发展，数学研究对象也是在不断地扩充之中丰富起来的. 囿于历史的局限，往往对某些量性对象，暂时无法去作数学的描述和分析，以至于不成其为数学研究对象，从数学史的角度看，这是常有的事. 例如，古希腊的 Pythagoras 学派原先只研究有理数，当时对无理数毫无认识，因而无理数在当时也不是数学的研究对象，后来由于 Hippasus 的发现，才促进了无理数的诞生（参阅本书 2.3 节中的相关内容），无理数也就随之成为数学研究对象了. Cantor 以前的数学家，只研究有限或潜无限量性对象，而实无限量性对象不是数学研究对象，直到 Cantor 古典集合论的诞生，实无限量性对象才成为数学研究对象. 又随机性量性对象原先也不是数学研究对象，但它最终还是进入了数学领域，这就是概率论这个重要的数学分支的诞生.①如此看来，模糊量性对象被精确性经典数学拒之门外，并不意味着它不可能成为数学研究对象，只是数学暂时还没有研究和处理它的办法. 直到 1965 年，Zadeh 首次引入模糊集的概念以后，数学才真正开始直接面对模糊性量性对象，数学的发展进入了数学研究对象由精确性到模糊性的再扩充时代.

所谓直接面对模糊性量性对象，其含义是：

(1) 直接承认模糊性量性对象也是一种数学研究对象，不再把它拒之于数学大门之外.

(2) 直接用数学方法去研究模糊性量性对象，而不是将模糊性量性对象转化为精确性量性对象后再去研究它.

对于上述(2)，确实有人想过，或说潜意识地主张过，先将模糊性量

---

① 在本书中有三处论及数学研究对象的再扩充，除了此处之外，还有 2.1 节和 5.5.4 节，读者不妨对照参阅之.

性对象转化为精确性量性对象后再去研究它.特别是由于电子计算机的不断更新换代和迅速发展,更是刺激了人们的这种想法或主张.然而令人失望的是:无论计算机的运行速度有多快,容量有多大,依然没有办法灵活地去处理模糊性的问题和研究模糊量性对象.例如,有人请你到车站接他的一个朋友,虽然你与那位被接的朋友从未谋面,但若告诉你此人个子高,又结实魁梧,鼻梁特高,厚嘴唇,大耳朵,头发乌黑而十分浓密,根据这些特点,你在车站十有八、九能很快从人群中辨认出这个人来.如果按照上述(2)中涉及的那种精确化观点,那就要先说清楚那位被接的朋友身高 1.82 米,体重 93 公斤,鼻梁高度是多少公分,头发共有多少根,如此等等.那么你到车站后,就得一个人一个人地去量身高,称体重,数头发等等,如此这般地去认人,岂非莫明其妙.然而真要让一台机器人去车站接人,那就只能输给它一系列数据,再一一对照吻合后,机器人才能认出被接的人.这就是先将模糊概念精确化后再处理的办法,而这种办法的别扭和不方便是显而易见的.我们上文(2)中所说之直接处理模糊量性对象的方法,恰恰要扬弃所说的这种机械而经典的办法.

应当指出,上文所论及的有如多、少、大、小、高、矮等一类模糊性量性对象,其实都是在人的观念世界中所构造出来的各种概念.现实世界中各种事物的许多量的侧面原来都是一清二楚的,并不带有模糊性.例如一个人的年龄,从出生那一刻到现在,共有几年几月几日,直至多少小时多少分秒,都是清清楚楚的,同样一个人的头发共有多少根,身高多少公分等等,均为一些准确无误的数字,没有什么模糊特征,但是人们为了简化和使用上的方便,就会引入模糊性量性概念,例如对于人的年龄来说,人们就从中概括出所谓"童年"、"少年"、"青年"、"中年"、"老年"等概念,这些概念虽然不那么一清二楚,带有模糊性,然而使用起来既自然又方便.否则,如果没有这些带模糊性的概念,我们的日常判断和日常语言都将会变得繁琐和困难.例如有人说:"街对面的一个年轻人在欺负一位老者".如果没有"年轻"和"老者"这种模糊性概念,那么只能这样说:"街对面一个××岁至××岁的人在欺负一位××岁以上的人".诸如此类,岂不繁琐别扭之极.如此说来,模糊性似乎只是人们为了使用上的方便而构造出来的一些概念性的东西,进而并非客观事物的固有属性了.其实话也不能这么说,首先,有如人们构造出"中年"这样一个带有模糊性的概念之后,中年这个带有模糊性的性质也就成为所有那些在某种年龄段中之人的固有性质了.其次,现实世界中还实际上存在着各种各样的对象,模糊性本身就是这些对象的存在形态,那就是对立物在转化过程

中的一种中介状态,亦就是认识论中常说的那种既非对立甲方,又非对立乙方的"非此非彼"或"亦此亦彼"状态.例如,导体和绝缘体是一种对立物,半导体是客观存在的对象,而半导体这种东西就呈现为部分地具有导体的性质(当这种材料在一定温度之上而使之自由电子多时),同时又部分地具有绝缘体的性质(当这种材料在一定温度之下而使之自由电子少时),因而半导体就是导体与绝缘体这种对立物的中介状态,或可称为该对立物的中介对象.如果将所有的导体汇集起来构成一集合 S,则凡是导体均属于 S,凡是绝缘体均不属于 S,而凡是半导体就只能说部分地属于 S,同时又部分地不属于 S.我们也可用图形来表示刚才所说的这种状况,即如图 5.1 所示:

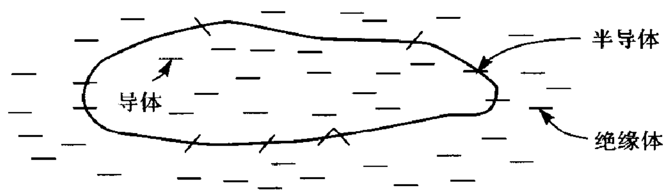


图 5.1

又如黎明和黄昏是一种客观存在的形态,它们本身就具有既是白昼又是黑夜这种模糊性,它们呈现为由黑夜转化为白昼和由白昼转化为黑夜的一种中介过度状态,也就是部分地具有白昼的性质,同时又部分地具有黑夜的性质.再如"中性人"是一类客观存在的对象,那么中性人本身就具有半男半女的模糊性,所以刚才所说的这些模糊性,就不是先构造出具有模糊的概念之后,再去归纳具有这种模糊性的对象,而是客观上存在着这样的对象,它本身就具有亦此亦彼的模糊性.关于中介对象和中介原则等等,读者可参阅本书的 5.5.2 和 5.5.3,在这里仅通过实例而作些描述,并不去作一般性的和哲学上的分析讨论.总的来说,模糊性这种东西,究竟是主观的还是客观的,应该说既有主观的,也有客观的.但是作为数学研究对象而言,都是数学研究的客观对象.因为数学研究对象并不局限于现实世界中的量性对象,同时也包括观念世界中的量性对象,诸如数、几何图形、关系结构等等,都不是现实世界中的某物,而是观念世界中的产物,然而不论如何,它们既是现实世界的客观反映,也都是数学研究的客观对象.

5.2 奠基于精确性经典数学之上的模糊数学

从本节起，我们来介绍关于模糊数学奠基的种种方案，并对它们作简短的评说.

1965 年，美国控制论专家 Zadeh 在他的开创性论文《Fuzzy Set》中首先提出模糊集合的概念，这是利用精确性经典数学的工具和方法刻画模糊数学概念的成功范例.

定义 1 给定论域 U，其上的一个模糊子集 A 是指对任何 $x \in U$ 都有一个数 $\mu_A(x)$ 与之对应，并称之为 x 属于模糊子集 A 的隶属程度. 亦即，模糊子集 A 完全由映射

$$\mu_A : U \to [0,1]$$

决定.

为简便计，以下将映射值 $\mu_A(x)$ 就记作 $A(x)$. U 上所有模糊子集的集合记作 $\mathscr{F}(U)$. 在这个定义之下，可以将精确集合中的许多概念照搬过来.

定义 2 设 $A, B \in \mathscr{F}(U)$，若对任何 $x \in U$，$A(x) \leqslant B(x)$，则称 B 包含 A，记作 $A \subseteq B$，或 $B \supseteq A$. 当 A 与 B 互相包含时，即 $A \subseteq B$ 并且 $B \subset A$ 同时成立时，称 A 与 B 相等，记作 $A = B$. 显然，$A = B$ 当且仅当对所有 x，$A(x) = B(x)$.

定义 3 $A, B \in \mathscr{F}(U)$，它们的并集记为 $A \cup B$，定义为：对所有 $x \in U$，

$$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x)),$$

它们的交集 $A \cap B$ 定义为：对所有 $x \in U$，

$$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x)).$$

A 的补集 A' 定义为：对所有 $x \in U$，

$$A'(x) = 1 - A(x).$$

容易由定义验证，模糊子集的并、交、补运算满足精确集合运算的大部分性质，比如幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、零壹律、复原律、对偶律（De Morgan 律）等等. 但互补律 $A \cup A' = U$ 与矛盾律 $A \cap A' = \varnothing$ 都不成立.

如此定义的模糊子集与同一论域上的精确子集之间有着十分密切的关系，这种关系就是通过“分解定理”与“表现定理”可以实现两者的转化.

定义 4 设 $A \in \mathscr{F}(U)$，$\lambda \in [0,1]$，A 的 λ 截集是指如下一个精确集合 $A_\lambda = \{x \mid x \in U \wedge A(x) \geq \lambda\}$. A 的 λ 强截集是指精确集合 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}} = \{x \mid x \in U \wedge A(x) > \lambda\}$. 其中的 λ 称为阈值，或置信水平.

定义 5 A，λ 同上，A 与 λ 的数乘集 λA 是指如下模糊子集：对所有 $x \in U$，$(\lambda A)(x) = \min(\lambda, A(x))$.

有了以上的概念，我们不难证明如下的分解定理：

定理 1(分解定理) 设 $A \in \mathscr{F}(U)$，则

(1)$A = \bigcup\limits_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_\lambda$； (2)$A = \bigcup\limits_{\lambda \in [0,1]} \lambda A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$.

此定理是说，模糊子集 A 可以分解为一族 λ 截集 A_λ 或 λ 强截集 $A_{\underset{\cdot}{\lambda}}$(它们都是精确集合)之并.

此外，我们若定义集合套如下：

定义 6 设有一族集合 $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$，满足条件：$\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2}$，则称此族集合为一集合套(或集轮).

定理 2(表现定理) 若 $\{A_\alpha \mid \alpha \in [0,1]\}$ 是一个集轮，则可以构造一个模糊子集 $A = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$.

表现定理恰好是分解定理的另一面，它是说，一族精确集合只需满足一定的条件，就可用以表示一个模糊子集. 我们可以把模糊子集与精确集合间的这种关系类比于实数与有理数之间的关系：一个实数可以作为一个有理数序列的极限；反之，任何一个收敛的有理数序列也可以代表一个实数. 类似地，一个模糊子集可以分解为一个精确集合族；反之，任何一个称为"集轮"的精确集合族也能表示一个模糊子集.

以上两条定理与前面的定义清楚地表明了，Zadeh 的模糊集合论是直接奠基于精确性经典数学之上的，模糊集合论中所使用到的论域 U 是一个精确集合，闭区间[0,1]上的实数是精确性经典数学中的重要量性对象，隶属函数是经典数学中的一个普通映射. 所以，一个模糊集，就是精确性经典数学中的一个特殊结构而已. 也就是说，可以认为这种模糊集合论完全是精确性经典数学的一个分支. 后来，人们把[0,1]换成带补的完全分配格，讨论 L 模糊集. 原先模糊集合论中相应的许多结论和概念，可以几乎不加改变地搬过来. 但从理论基础的意义上说，它与上文所论之模糊集合论没有本质上的区别，仍然是直接奠基于精确性经典数学上的一个特殊结构. 但是，我们却不可由此(模糊集合论是精确性经典数学的一个分支)而武断地认为，模糊集合论得不出精确性经典数学得不到的新结果，进而认为发展模糊数学是不必要的. 须知任何数学理论的发展都有很强的实际背景，人们无非是把实际背景中所体验到的种种

结论抽象为用数学上的形式语言加以严格的表达而已，没有实际背景而凭空构造出来的数学结构是不可想象的.模糊集合论这种数学结构之所以被提出并得到很大的发展，这是由于人们迫切需要数学地处理模糊量性对象.若非如此，某个数学家凭空提出研究从 U 到 $[0,1]$ 上的映射，那既不可能引起众多研究者的注意而得到许多结果，所得结果也不可能获至模糊概念之关系的合理而生动的解释，并得到许多方面的应用.如此看来，模糊集合论的结果完全可以在经典数学中作出的说法既正确又不正确.说它对乃是因为模糊集合论所使用的概念、方法完全是经典数学中的概念和方法，所以模糊集合论的任何结果都无一例外地可以认为是经典数学范围内的结果.说它不对，乃是因为模糊集合论研究的对象毕竟是经典数学所拒绝研究的模糊量性对象，也正由于模糊量性对象中的大量事实为模糊集合论提供着生动丰富的源泉，才使模糊集合论有了蓬勃的发展，这绝不是在经典数学中简单地定义了一个从 U 到 $[0,1]$ 上的映射，然后进行漫无目标的形式推导就能办到的.

其实，综观全部数学史，用现成的数学工具和方法去处理一类原来不研究的数学对象，也是不乏先例的.为了类比地说明这一点，最好的一例，莫过于用测度论这一工具去研究随机现象而形成的公理化概率论的情况了.我们知道，在概率论诞生之前的经典数学只研究确定性现象，即在一组确定的条件下，必然出现唯一确定的结论这样一类现象；而不去考虑不确定的随机现象，即在一组确定的条件之下，可能出现这种或那种不同结果的现象.但是反观现实世界，在概率论诞生之前，不确定的随机现象比比皆是，人们早就在探索从数量的角度去把握随机现象的方法.于是"概率"的概念渐渐产生，古典概率论也渐趋成熟.直至 20 世纪 30 年代，由前苏联数学家 Колмогров 构作的概率论公理化系统，彻底地解决了概率论之奠基问题，把概率论完全纳入确定性经典数学的范畴.例如，我们先在给定的空间 Ω 上定义一个 σ 代数 $\mathscr{F}$，这实际上是 Ω 的某些子集构成的类，但要对集合的可数(无穷)并、交及补运算封闭，"事件"就被定义为 $\mathscr{F}$ 的元素，而"概率" P 就被定义为该 σ 代数 $\mathscr{F}$ 上的一个正则、规范和 σ 可加的实值测度，即概率是映射 $P:\mathscr{F}\to[0,1]$，且满足条件

(1) $P(A)\geqslant 0$ 对任何 $A\in\mathscr{F}$ 成立，

(2) $P(\Omega)=1$，

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$，且 $i\neq j$ 时 $A_i\cap A_j=\varnothing$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

从而，随机现象中许多符合实际的规律，就都能表现为这种特殊的测度论中的定理. 如此，人们在这个系统中所从事的仍然是一种确定性经典数学的工作，然而它所表现的，都是随机现象中的概率论规律. 因而所说的这种确定性经典数学的工作，实际上是有关随机现象的研究工作，亦即着眼于方法和手段，它是确定性的；着眼于对象和结果，却是随机性的.

基于以上历史事实，可以类比地说明如下几点. 首先，既然能运用只处理确定性现象的经典数学的概念和方法去处理和研究它所拒绝考虑的随机现象，那么将当前这种只研究精确现象的经典数学的概念和方法，用以处理和研究它所拒绝考虑的模糊现象的做法，同样是合理可行的. 其次，正如概率论只能成为经典数学的一个分支那样，Zadeh 开创的模糊集合论也只能成为经典数学的一个分支. 这样，不管是概率论，还是模糊集合论，都是奠基于精确性经典数学，即以经典二值逻辑为配套的推理工具的近代公理集合论 ZFC 之上. 最后，既然概率论中能涌现出大量的、为确定性经典数学所没有的成果，那么，在当前的研究方法之下，模糊数学也将丰富地获得精确性经典数学所没有的成果.

事实也是如此. 自 Zadeh 创建模糊集合论以来，模糊数学得到迅猛的发展. 人们利用将从非空集 X 到非空集 Y 的点映射 f 提升为从 $\mathscr{F}(X)$（X 上所有模糊子集的集）到 $\mathscr{F}(Y)$ 的集映射的强有力的扩张原理，以及依据精确性经典数学中各种概念到模糊数学中的合理推广和移植，成功地发展了模糊代数、模糊拓扑、模糊数、模糊测度与积分，直至模糊拓扑线性空间、模糊赋范空间等一系列模糊数学分支学科，从中获得一大批精确性经典数学中所没有的结果. 然而无论如何，这些工作都是直接奠基于精确性经典数学之上的.

现在，让我们稍具体一点地考察两个例子，借以进一步说明上文所论的结论，为此，先给出扩张原理如下：

扩张原理　设 f 是从非空集合 X 到非空集合 Y 的点映射，则 f 可由下式扩张为从 $\mathscr{F}(X)$ 到 $\mathscr{F}(Y)$ 的集映射 f 及由 $\mathscr{F}(Y)$ 到 $\mathscr{F}(X)$ 的逆映射 f^{-1}：

$$f(A)(y)=\begin{cases}\sup\limits_{f(x)=y}A(x) & \text{当 } y\in f(X)\text{ 时,}\\ 0 & \text{当 } y\notin f(X)\text{ 时,}\end{cases}$$

$$f^{-1}(B)(x)=B(f(x)),\text{对所有 } x\in X.$$

显然，当 A,B 分别是 X,Y 的通常子集时，

$f(A)=\{y\mid \exists x\in A(y=f(x))\}$，$f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B\}$.

5.2.1 模糊拓扑

定义 7 若 $A \in \mathscr{F}(U)$ 满足条件：$A(x)=\lambda>0$，当 $y \neq x$ 时 $A(y)=0$，则称 A 为模糊点，记为 x_λ. 以 U^* 记 U 上所有模糊点之集.

定义 8 设 $x_\lambda \in U^*$，$A \in \mathscr{F}(U)$，当 $x_\lambda \subseteq B$ 时，即 $B(x) \geqslant \lambda$ 时，称模糊点 x_λ 属于 B，记为 $x_\lambda \in B$. 若 $A(x)+\lambda>1$，则称 x_λ 重于 A，记为 $x_\lambda \widetilde{\in} A$.

模糊点与模糊子集间的“属于”关系（注意这不是清晰集合意义下的属于关系）以及“重于”关系，都是通常清晰点与清晰集合之间属于关系的推广．“重于”关系是 1977 年蒲保明、刘应明提出的，这个关系在许多方面都有比“属于”关系更优的性质，对模糊拓扑学、模糊分析学等方面的发展都起着一种根本性的作用.

定理 3 设 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathscr{A}\}$ 是 U 上的模糊子集族，则模糊点 $x_\lambda \widetilde{\in} \bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} A_\alpha$ 当且仅当有某个 α 使 $x_\lambda \widetilde{\in} A_\alpha$.

但是这一似乎显然的基本性质在模糊点与模糊子集的“属于”关系之下却不成立．例如，就取模糊子集 A_n 为模糊点 $x_{1\frac{1}{n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = x_1$，于是依定义 $x_1 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$，但对任何 n，$x_1 \overline{\in} A_n$.

模糊拓扑学的研究起于 C. L. Chang 1968 年发表的文献[72]，此文给出了模糊拓扑空间的一种定义．1976 年 R. Lowen 提出了模糊拓扑空间的另一种更强也更适宜的定义[73]：

定义 9 设 T 是非空集 X 上的一族模糊子集：$T \subseteq \mathscr{F}(X)$，称 T 是 X 上的模糊拓扑，若 T 满足：

（1）对任何 $r \in [0,1]$，$r^* \in T$. 这儿 $r^* \in \mathscr{F}(X)$，对任何 $x \in X$，$r^*(x)=r$；

（2）对任何 $U,V \in T$，有 $U \cap V \in T$；

（3）对任何 $U_\alpha \in T(\alpha \in \mathscr{A})$，有 $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathscr{A}} U_\alpha \in T$.

此时 (X,T) 称为模糊拓扑空间．而 $U \in T$ 称为开集，而当 U 的补集 $U' \in T$ 时，称 U 为闭集.

在定义了模糊拓扑空间之后，我们就可以仿照通常的分明拓扑学中那样，定义“邻域”的概念如下：

定义 10 在模糊拓扑空间 (X,T) 中，模糊子集 A 称为模糊点 x_λ 的邻域，若有开集 $B \in T$，使 $x_\lambda \in B \subseteq A$.

但是这个邻域概念不甚理想，分明拓扑中的某些关于邻域的性质不

能平移到模糊拓扑中来. 文献[74] 在他们的"重于"关系基础上, 引入了"重域"概念以代替"邻域"概念.

定义 11 在模糊拓扑空间(X,T)中, 模糊子集 A 称为模糊点 x_λ 的重域, 若有开集 $B \in T$, 使 $x_\lambda \tilde{\in} B \subseteq A$. 这儿 $\tilde{\in}$ 是模糊点与模糊子集的重于关系.

利用这个重域概念, 文献[74] 建立了一个完整的模糊拓扑空间的收敛理论. 继后, 重域概念在积空间与商空间、紧性、一致结构与嵌入理论等方面继续发挥重要作用. 刘应明还证明了: 在模糊拓扑空间中, 在"扩充原则"、"包含原则"、"由值域决定的原则"及"普适原则"下确定的点与集的邻属关系恰是重于关系, 相应的邻近构造就是重域系[75]. 这就从本质上指出了重域概念的合理性.

从以上对模糊拓扑中最重要的几个概念的定义中, 我们可以清楚地看出, 不管引入的概念是这样定义或是那样定义(这要取决于数学家对该领域的理解和他本人对数学本质的把握程度), 它们总是有赖于模糊集概念. 而这儿使用的模糊集又总是在精确性经典数学中构造出来的一种特殊结构. 所以, 模糊拓扑学奠基于精确性经典数学, 应当是明白无疑的了.

5.2.2 模糊代数

模糊代数是专门研究模糊集的各种代数结构的, 诸如模糊群、模糊线性空间等. 这方面最早的工作见于 1971 年 A. Rosenfeld 的文献[76], 其中首次引入模糊群. 而模糊线性空间则是 1977 年被引入的[77]. 我们来看一下它们的定义:

定义 12 设 G 是一个群, A 是 G 的一个模糊子集, 称 A 是 G 上的模糊子群(或模糊群), 如果对 G 中任何 x, y 满足:

(1) $A(xy) \geqslant \min(A(x), A(y))$.

(2) $A(x^{-1}) \geqslant A(x)$.

易由以上定义知, $A(x^{-1}) = A(x)$, 若 e 是 G 的单位元, 则对所有 $x \in G$, $A(x) \leqslant A(e)$.

定理 4 设 X 是数域 K 上的线性空间, $A, B \in \mathscr{F}(X)$. $f: X \times X$ 与 $g: K \times X \to X$ 分别是 X 上的加法和数乘映射, 则它们的提升为

$$f(A,B)(x) = (A+B)(x) = \sup_{s+t=x} \min(A(s), B(t)),$$

$$g(k,A)(x)=(kA)(x)=\begin{cases}A(x/k), & \text{当 } k\neq 0\\ (0A)(x)=\begin{cases}\sup\limits_{t\in X}A(t), & x=\theta\\ 0, & x\neq\theta\end{cases} & \text{当 } k=0\end{cases}$$

特别对 A,B 分别取模糊点 x_λ 与 y_μ，有

$$x_\lambda+y_\mu=(x+y)_{\min(\lambda,\mu)}$$

$$kx_\lambda=(kx)_\lambda.$$

证明可由扩张原理直接推得. 这样，我们就对线性空间 X 中模糊子集间引入了加法和数乘运算. 可用它们来定义模糊线性空间.

定义 13 X 是数域 K 上的线性空间，A 是 X 中的模糊子集，若对任何 $m,n\in K$，都有 $mA+nA\subseteq A$，就称 A 是模糊线性空间.

不难看出，当 A 是 X 的一个通常的清晰子集时，$mA+nA\subseteq A$ 也表明 A 是 X 的线性子空间.

从以上关于模糊群和模糊线性空间的定义看，它们与前面论及的模糊拓扑的定义一样，也都是在奠基于精确性经典数学的模糊集合论上，再附加上种种条件而形成的，因而就无一例外地是直接奠基于通常的经典数学之上的了. 不过这儿稍有不同的是，模糊群是通常的经典的模糊子集，模糊线性空间是通常的经典线性空间的模糊子集. 也就是说，要定义模糊群、模糊线性空间，必须先有通常的群和线性空间，这样，它们就更在另一层意义上直接依赖于精确性经典数学了.

还有诸多的模糊数学分支，比如模糊测度、模糊数、模糊集值映射、模糊赋范空间、模糊拓扑线性空间、模糊拓扑群等等，也都是类似于上面两个例子，在经典数学理论之下，适当引进模糊子集后加以定义和展开的. 因而，就像上面所分析的一样，也都是直接奠基于精确性经典数学之上的. 应该说，模糊数学沿着这个方向发展下去，将是有生命力和卓有成效的. 道理也很清楚：我们可以时时借助于十分成熟的经典数学方法和利用十分丰富的经典数学成果. 相信模糊数学的主流，在今后相当长一段时间内仍是这个方向，并且仍可不断地取得丰硕的结果.

5.3 ZB 公理集合论系统

如所知，由 Zadeh 首次引入模糊集定义之后，为了数学工作的广泛性，模糊集概念已几经修改和扩张. Goguen 把隶属函数的值域[0,1]闭区间改为可传的半序集，而 Brown 则将它限制为完备布尔格. 我们看到，

不论这样或那样的定义方式，都必须依赖于一个事前约定的集合，这使得这些模糊集合系统都要奠基于经典集合论——比如说，最常用的ZF公理集合论——之上，这一点已在上一节中详细分析过；并且，这些被确定了的模糊集的元素和模糊度本身却都不再是它自己那种模糊集了.

为了使我们一开始工作就始终与模糊集打交道，并且所考虑的模糊集的元素本身也是模糊集，我们自然会想到布尔值全域 $V^{(B)}$.

定义 对于完备布尔代数 $B=(B,+,\cdot,-,0_B,1_B)$，令 $V_\alpha^{(B)}=\{x\mid \mathrm{Func}(x)\wedge \mathrm{Ran}(x)\subseteq B\wedge \exists\beta<\alpha(\mathrm{Dom}(x)\subseteq V_\beta^{(B)})\}$，$V^{(B)}=\bigcup_{\alpha\in O_n}V_\alpha^{(B)}$，则称 $V^{(B)}$ 为布尔值全域.

这个定义是如此完成的：我们首先依层次递归地定义 $V_\alpha^{(B)}$，对于序数 α，第 α 层布尔值全域 $V_\alpha^{(B)}$ 中的元素都是一些函数，这些函数的定义域是某个低层次 $V_\beta^{(B)}$ 的子集，而它的值域乃是布尔代数 B 的某个子集. 亦即，这些函数是将低层次布尔值全域中的某些元素映射到布尔代数 B 中去. 在对所有序数 α 都定义了 $V_\alpha^{(B)}$ 之后，它们求并后的全体就成为布尔值全域 $V^{(B)}$.

容易证明，$u\in V^{(B)}$ 当且仅当 $\mathrm{Func}(u)\wedge\mathrm{Ran}(u)\subseteq B\wedge\mathrm{Dom}(u)\subseteq V^{(B)}$. 即布尔值全域 $V^{(B)}$ 中任何元素 u 都是一个定义在布尔值全域 $V^{(B)}$ 的某个子集上、取值为布尔值的函数. 从中又可看出，若 $v\in\mathrm{Dom}(u)$，则 $v\in V^{(B)}$，即 u 的定义域中任一元素又是布尔值全域 $V^{(B)}$ 中的元素，也即它与 u 具有同一类型的特征. 我们对于任何 $x\in\mathrm{Dom}(u)$，如果将 $u(x)$ 的值（它是一个布尔值）看作 x 属于 u 的程度，即模糊集合论中的隶属度，那么布尔值函数即可考虑为模糊集，布尔值全域 $V^{(B)}$ 就可看作模糊集的全域. 这种定义方式下的“模糊集”的元素仍是“模糊集”，达到了前后一致的要求.

但是，这种将布尔值函数就“看作”是模糊集的直观想法毕竟还不是严格的数学描述，那么，如何将这种想法数学化呢？

张锦文引进“正规弗晰集合结构”的概念，证明了任一正规弗晰集合（即模糊集合）结构都是带本元的集合论公理系统ZFA的一个布尔值模型，它们能够作为模糊集合论的理论基础[8]，张锦文又在文献[79]中写道：“我们的工作表明：Cantor集合论是公理集合论的标准模型，而我们的结构 U（弗晰集合论作为 U 的部分）正是公理集合论的一种非标准模型. 现代模型论表明，非标准模型是一类理论（例如形式数论、实数理论、集合论等）的必然的逻辑结论，有标准模型就有非标准模型，有Cantor集合论就有布尔值集合论，也就有弗晰集合论.”

就是说，张锦文并没有为模糊集合论提出专有的理论体系（公理化系统），而是找寻到经典公理集合论（它们是用来刻画清晰集合的集合论系统，比如ZF，或带本元的ZFA）的一种非标准模型，并说明这种非标准模型能够很好地表现模糊集合的特性，因而可以看作是模糊集合论的模型.

真正利用这种想法，对模糊集合论建立起自身的、不依赖于经典的集合论系统的新的公理系统的，当属Chapin和Weidner，下面就介绍他们的工作.

E. W. Chapin 1975年在文献[80]中提出的"集合值集论"公理系统是一个将模糊集合公理化的形式系统. 在这个系统中，属于关系ε看作是三元关系$\varepsilon(x,y,w)$，它被解释为"x以至少w的程度属于y"，也就是说，这个三元关系在满足$0\leqslant w\leqslant \mu_y(x)$的情况下都看作是精确地真的；而不是解释为"$x$以程度$w$属于$y$"，即不被解释为$\mu_y(x)=w$. 当然，这个$\mu_y(x)$是我们借用模糊数学的惯用记号，表示$x$对于$y$的隶属程度，它并不是系统内的符号. Chapin的形式系统虽在许多方面恰当地反映了模糊集合论的本性，但也有一些不甚准确之处，即不太适合模糊数学本来的意图.

因而，A. J. Weidner在分析了Chapin系统的某些不足之后，又提出了一个新的模糊集合论的新的公理化系统，他称之为Zadeh-Brown系统，简称ZB系统，以表明它是以Zadeh开创的模糊集合论和以Brown的L模糊集合论（亦即将隶属函数扩充为从X到一个完备布尔格L上的映射）为实际背景的公理系统.

Weidner指出，Chapin的公理系统有以下几点不甚符合模糊数学的本来意图. 第一，在模糊集合论中的隶属函数$\mu_y(x)$可以看作二元函数，比如就记作$\mu(x,y)$，即给定两个对象x和y，就有唯一确定的值，使x以该值为度隶属于y. 这样，将映射的值域从$[0,1]$变为其他代数结构，就可形成种种模糊集之变形. 但Chapin的三元关系ε却无法看作二元函数，因为对给定的x和y，将有许多w（只要满足$0\leqslant w\leqslant \mu_y(x)$），都满足$\varepsilon(x,y,w)$，这样，当然不可能将$w$写成$x$和$y$的函数值形式. 因此，模糊集合的现代变形就难以仍然看作Chapin系统的模型. 第二，Chapin系统中的关系公理使得"度"的每个模糊子集也是"度"，这样对于那些有资格充任"度"的集作了太严格的限制；"度"之间的种种关系仅限于模糊子集间的关系，这其中主要的就是包含关系$\subseteq$. 显然，度和度之间完全没有关系是不适用的，但把度与度之间的关系严格限制为集之间的包含

关系，恐怕也是不恰当的. 第三，Chapin 的空集公理假定了这样一个极小度的存在性：每个元素 x 都以极小度属于任何元素 y，亦即 $\varepsilon(x,y,0)$ 永真，这儿以 0 表示这个极小度. 在任何通行的模糊集系统中并不存在这种统一的最小度. 事实上，"x 以 0 度属于 y" 还是当作 "x 不属于 y" 为好，不宜与 "x 以 w 度属于 y" 相提并论. 因为如果我们把这两者用同一种关系式表达，将在以后的公理、定理叙述中时时要剔除度为 0 的情况而给自己带来麻烦.

Weidner 在作了这些分析之后，给出了他的 ZB 公理系统. 我们在下文就来阐述这个公理系统的原始符号、公理及主要结果. 主要内容取材于文献[81]，但有些地方也表达了我们的意见，并对原文的少数笔误作了一些修改.

ZB 系统不依赖于事先约定的其他集合论系统(比如 ZFC 系统或 ZFA 系统)，它是一个建基于一阶逻辑之上的独立存在的公理化系统. 它有如下两个原始符号：

ε——三元谓词符号，$\varepsilon(x,y,w)$ 解释成 x 以模糊度 w 是 y 的元素；

$\leqslant$——二元谓词符号，解释成模糊度的序. 模糊度是一个定义概念，将在下文中给出定义，因为 ZB 中的个体都是模糊集而无其他，所以，这就先验地规定了，模糊性的质量(模糊度)自身也是模糊集.

以下依次给出 ZB 系统的非逻辑公理，并对各公理作一些说明.

模糊外延性公理：

ZB1 $\forall x \forall y[\forall z \forall w(\varepsilon(z,x,w) \leftrightarrow \varepsilon(z,y,w)) \rightarrow x = y]$.

这就是说，两个模糊集 x 和 y 要相等，仅须任何元素在相同的度之下同时属于 x 和 y. 须指出的是，这也包括了有的元素在任何度之下既不属于 x 也不属于 y.

模糊函数化公理：

ZB2 $\forall v \forall w \forall x \forall z[\varepsilon(z,x,v) \wedge \varepsilon(z,x,w) \rightarrow v = w]$.

此即若一个模糊集以某个度是另一模糊集的元素，则这个度是唯一的. 故模糊 ε 关系可以看作是二元函数，即当 $\varepsilon(x,y,w)$ 成立时，w 可看作是由 x、y 唯一确定的函数值 $\mu_y(x)$. 显然，这与 Zadeh、Brown 等人的模糊集合论的方法是一致的.

为了形式化地定义"u 是度"，我们只需引入如下定义：

定义 1 $D(u) \leftrightarrow \exists z \exists x(\varepsilon(z,x,u))$.

我们想使所有的度上的 $\leqslant$ 关系是半序，并且其中有最大元，任何两个度有最大下界，这都反映在以下的序公理 ZB3 之中.

序公理：

ZB3 $\forall u \forall v \forall w[(u \leqslant v \to D(u) \wedge D(v)) \wedge (D(u) \to u \leqslant u)$
$\wedge (u \leqslant v \wedge v \leqslant u \to u = v) \wedge (u \leqslant v \wedge v \leqslant w \to u \leqslant w)$
$\wedge (D(u) \wedge D(v) \to \exists w(w \leqslant u \wedge w \leqslant v \wedge \forall w'(D(w')$
$\wedge w' \leqslant u \wedge w' \leqslant v \to w' \leqslant w))) \wedge \exists w''(D(w'')$
$\wedge \forall u(D(u) \to u \leqslant w''))]$.

这条公理较长，实际上一共有6个句子，确定了6件事情. 第1句，$u \leqslant v \to D(u) \wedge D(v)$ 指出凡可在关系 $\leqslant$ 之下进行比较的模糊子集都是“度”. 当然，这并没有说任何两个度之间一定可以比较. 以下3句分别确定了度之间 $\leqslant$ 关系的自反性、反对称性及可传性：$D(u) \to u \leqslant u$，$u \leqslant v \wedge v \leqslant u \to u = v$，$u \leqslant v \wedge v \leqslant w \to u \leqslant w$. 第5句是 $D(u) \wedge D(v) \to \exists w(w \leqslant u \wedge w \leqslant v \wedge \forall w'(D(w') \wedge w' \leqslant u \wedge w' \leqslant v \to w' \leqslant w))$，此即对任何两个度 u、v，都存在一个最大下界 w，它既不超过 u，不超过 v（从而是 u、v 的公共下界），又比 u、v 的任何下界 w' 要大. 最后一句 $\exists w''(D(w'') \wedge \forall u(D(u) \to u \leqslant w''))$ 是说，有这样一个度 w''，它比任何度 u 都要大. 第5、6两句所确定的 u、v 的最大下界和整个度中的最大元，由反对称性可以证明它们都是唯一的；所以，可以用 uv 来记 u 和 v 的最大下界，用1记度中的最大元，又称为最大度.

以上三条公理刻画的是基本概念 ε 和 $\leqslant$ 的特征. 下面的 ZB4 ～ ZB7 等4条公理则是由已给模糊集造新的模糊集的几种方法.

模糊对偶公理：

ZB4 $\forall x \forall y \forall u \forall v[D(u) \wedge D(v) \wedge (x \neq y \vee$
$(x = y \wedge u = v)) \to \exists f(\forall z \forall w(\varepsilon(z, f, w) \leftrightarrow$
$(z = x \wedge w = u) \vee (z = y \wedge w = v)))]$

其含义是，对任何 x 和 y 以及任何度 u 和 v，当 $x \neq y$ 时，或者 $x = y$ 且 $u = v$ 时，一定存在一个模糊无序对 f，其中仅有 x 和 y 分别以度 u 和 v 是 f 的元素. 显然，由 ZB1，这样决定的 f 是唯一的. 我们记之为 $\{x, y\}_{u,v}$，或者 $\{y, x\}_{v,u}$，但不可记为 $\{x, y\}_{v,u}$，因为这样将成为 x 以 v 度、y 以 u 度是 f 的元素了. 若 $x = y$，必须 $u = v$，就将这个模糊无序对 $\{x, x\}_{u,u}$ 记作 $\{x\}_u$，这是一个模糊单点集. 另外，我们还可以注意到，在经典集合论中，含 x、y 两元素的无序对 $\{x, y\}$ 是唯一的，但在这儿，由于度的变化，含 x、y 两元素的无序对 $\{x, y\}_{u,v}$ 却有无穷个. 最后，将度为1的无穷对 $\{x, y\}_{1,1}$ 就简记为 $\{x, y\}$，它们又成为经典集合论中的无序对了.

下一条公理称为模糊联集公理，这是近代公理（或称精确的经典）

集合论 ZF 系统中的联集公理在模糊集论中的平移. 显然,对给定的模糊集 x,我们希望 x 的任一元素的任一元素都属于 x 的联集,问题在于它们属于 x 的联集的度该是多少?看来最合理的规定应该如下:假定 $\varepsilon(t,x,u)$ 及 $\varepsilon(z,t,w)$,直觉地,我们置 z 以度 uw 属于 x 是恰当的. 这好像 t 与 x 以强度为 u 的绳子相联,z 与 t 又以强度为 w 的绳子相联,则 z 与 x 之间联结的强度应该是 u 与 w 的最小值. 不过我们以 u 和 w 的最大下界 uw 来代替两者的最小值而已. 因为度之间仅有半序关系,两者的最小值不一定存在,必须代之以最大下界. 然而,如果还有另一个 t',使得同一对 z 和 x 还以 t' 为桥梁相联:$\varepsilon(z,t',w')$ 和 $\varepsilon(t',x,u')$,此时又可形成一个 $u'w'$ 成为 z 属于 x 的度,我们就面临着究竟选哪一个作为 z 属于 x 的度的问题. 当然,看来最合理的办法是在 uw 和 $u'w'$ 中选择较大的一个,同上理由,我们就取它们的最小上界. 但是,至此我们还没有肯定过度的集合的最小上界的存在性,然而,这一点是能够做到,不过要等到 ZB6 给出之后. 为了缩短模糊联集公理的长度,我们先引入以下的定义.

定义 2 $UB(z,x;w)\leftrightarrow[D(w)\wedge\forall t\forall u\forall v(\varepsilon(z,t,u)\wedge\varepsilon(t,x,v)\rightarrow uv\leqslant w)]$;

$w=LUB(z,x)\leftrightarrow UB(z,x;w)\wedge\forall w'(UB(z,x;w')\rightarrow w\leqslant w')$.

注意 z、x 不是度,$LUB(z,x)$ 也并不是 z,x 的最小上界,而是联结 z 与 x 的"最小上界度".

模糊联集公理:

ZB5
$$\begin{aligned}&\forall x\exists f\forall z((\exists t\exists u\exists v(\varepsilon(z,t,u)\wedge\varepsilon(t,x,v))\\&\rightarrow\exists w(\varepsilon(z,f,w)))\wedge\forall w(\varepsilon(z,f,w)\\&\rightarrow\exists t\exists u\exists v(\varepsilon(z,t,u)\wedge\varepsilon(t,x,v))\\&\wedge w=LUB(z,x)))\end{aligned}$$

要注意的是,模糊联集公理的这种表达形式,实际上断言了度的某个聚类(即所有联结 z 和 x 的"上界度"w 的类,即满足定义 2 中的 $UB(z,x;w)$ 的所有 w 组成的类)之最小元的存在性. 因为它断言:给定任何模糊集 x,有这样一个模糊集 f 存在,使得对于任何 z,若 $\exists t\exists u\exists v(\varepsilon(z,t,u)\wedge\varepsilon(t,x,v))$,就有 w 满足 $\varepsilon(z,f,w)$,并且这个 w 就是 $LUB(z,x)$. 这句话已经断定 $LUB(z,x)$ 的存在性了,除非 z 与 x 之间不存在 t 使任何 $\varepsilon(z,t,u)$ 与 $\varepsilon(t,x,v)$ 成立. 假如我们选择模糊集合的联集公理如下:

$$\begin{aligned}&\forall x\exists f\forall z\forall w(\varepsilon(z,f,w)\leftrightarrow\exists t\exists u\exists v(\varepsilon(z,t,u)\\&\wedge\varepsilon(t,x,v))\wedge w=LUB(z,x)),\end{aligned}$$

则在满足 $\varepsilon(z,t,u)$ 及 $\varepsilon(t,x,v)$ 的 t、u、v 都存在之后,我们还不能断言 z 以

某个度 w 属于 f，因为我们尚不知道是否存在一个 w 使 $w=\mathrm{LUB}(z,x)$.

易证满足 ZB5 的 f 是唯一的，记作 $\bigcup x$.

下一公理是模糊替换公理模式. 我们用 $\psi(\vec{u})$ 记 $\psi(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 都是 ψ 的自由变元.

模糊替换公理：

ZB6 令 $\psi_1(s,z;\vec{p}_1)$ 及 $\psi_2(z,w;\vec{p}_2)$ 是 ZB 的至少含两个自由变元的公式，则

$$\begin{aligned}&\forall \vec{p}_1\forall \vec{p}_2[\forall s\forall z\forall z'(\psi_1(s,z;\vec{p}_1)\wedge\psi_1(s,z';\vec{p}_1)\rightarrow z=z')\\&\wedge\forall z\forall w\forall w'(\psi_2(z,w;\vec{p}_2)\wedge\psi_2(z,w';\vec{p}_2)\\&\rightarrow w=w'\wedge D(w))\rightarrow\forall x\exists y(\forall z\forall w(\varepsilon(z,y,w)\\&\leftrightarrow\exists s\exists v(\varepsilon(s,x,v)\wedge\psi_1(s,z;\vec{p}_1)\wedge\psi_2(z,w;\vec{p}_2)))].\end{aligned}$$

这就是说，若 $\psi_1(s,z;\vec{p}_1)$ 及 $\psi_2(z,w;\vec{p}_2)$ 都是从第一变元到第二变元的(单值)函数，那么，对任何模糊集 x，我们总可以将其中的元素 s(它以模糊度 v 属于 x) 替换为任一元素 z，并且让 z 以某个度 w 属于新构成的模糊集 y. 要注意的是，在经典集合论 ZF 中，替换公理是把集中的元素任意替换为其他元素，而在 ZB 中，除了元素的任意替换之外，还对"度"任意替换. 故而可把 ZB6 看作是替换两次的公理. 我们还要指出，公理中最后一式 $\psi_2(z,w;\vec{p}_2)$ 中的 z 并不是 $\psi_2(v,w;\vec{p}_2)$ 之误，因若写成 $\psi_2(v,w;\vec{p}_2)$，倒反而会引起同一元素以两个不同的度属于同一模糊子集的矛盾.

为形成相当于幂集公理的 ZB7，须先引入模糊子集的概念.

定义 3 $x\subseteq y\leftrightarrow\forall z\forall w(\varepsilon(z,x,w)\rightarrow\exists u(w\leqslant u\wedge\varepsilon(z,y,u)))$. 易证模糊子集关系是自反、反对称及可传的.

模糊幂集公理：

ZB7 $\forall x\exists y\forall z(z\subset x\leftrightarrow\exists w(\varepsilon(z,y,w)))$.

注意我们不能断言 x 的模糊幂集 y 的唯一性，因为对于 x 的任一子集 z，我们没法确定唯一的度 w 使 $\varepsilon(z,y,w)$. 这诸多满足条件的 y，我们都称之为 x 的幂集. 有人会认为，取定这个隶属度 w 会带来方便，但问题在于，这个唯一的隶属度 w 的待选者从直觉上看是难以确定的. 不过这种不唯一性并不妨碍系统的建立和发展. 须知即便不是如此约定，利用 ZB6，也还是允许我们将度加以变化而得到 x 的任何其他的模糊幂集.

由已知模糊集而造出新模糊集的 4 条公理(ZB4 ～ ZB7)就叙述到此，关于由它们还可定义的其他运算待稍后作出. 现在再给出 ZB 的最后两条公理：模糊正则公理 ZB8 和模糊无穷公理 ZB9，它们的功能与 ZF 中的正则公理及无穷公理相类似，前者使我们证得如下结果：没有一个模

糊子集以任何度成为自己的元素，也不存在无限递降的模糊 ϵ 串. 后者则无条件地断定含有无穷多个模糊集的集合之存在性.

模糊正则公理：

ZB8 $\forall x[\exists z\exists w(\epsilon(z,x,w))\rightarrow\exists z\exists w(\epsilon(z,x,w)\wedge$
$\neg\exists y\exists u\exists v(\epsilon(y,z,u)\wedge\epsilon(y,x,v)))]$

模糊无穷公理：

ZB9 $\exists x[\exists z\exists w(\epsilon(z,x,w))\wedge\forall z\forall w(\epsilon(z,x,w)\rightarrow$
$\exists v(\epsilon(\bigcup\{z,\{z\}\},x,v)))]$.

至此，ZB 公理集合论系统构造完毕.

以下将由这些公理出发，给出其他一些重要概念的定义，并证明一些重要而基本的定理. 首先，我们来定义一种“标准集”，即其元素都以最大度 1 属于此集. 我们可以将它们视为精确的经典集合.

定义 4 $STD(x)\leftrightarrow\forall z\forall w(\epsilon(z,x,w)\rightarrow w=1)$.

任给一个模糊集 x，我们可以证明，由之得以确定唯一的一个标准集：

定理 1 $\forall x\exists!y(STD(y)\vee\forall z(\epsilon(z,y,1)\leftrightarrow\exists v(\epsilon(z,x,v))))$.

证明 定义 $\psi_1(s,z)\leftrightarrow s=z,\psi_2(z,w)\leftrightarrow w=1$，再用 ZB6 即得. □

定理 1 中唯一的 y 称为 x 的标准化集，记作 x_s. 显然 x 是标准集当且仅当 $x=x_s$. 公理 ZB7 断言了任何一个模糊集 x 的模糊幂集的存在性，然而，我们也指出它不是唯一的. 不过，通过对这些幂集的标准化，我们可以得到 x 的唯一标准模糊幂集，这个幂集称为 x 的强幂集，记为 $P_s(x)$.

在 ZF 系统中，子集公理可由替换公理证出. 当我们在 ZB 中搞清子集公理的形式之后，类似的结果也可以在 ZB 中证出.

定义 5 模糊子集公理是 ZB 中如下形式的公式：

$$\forall\vec{p}[\forall z\forall w\forall v(\phi(z,w;\vec{p})\wedge\phi(z,v;\vec{p})\rightarrow v=w)$$
$$\rightarrow\forall x\exists y(\forall z\forall w(\epsilon(z,y,w)\leftrightarrow\exists v(\epsilon(z,x,v)$$
$$\wedge w\leqslant v)\wedge\phi(z,w;\vec{p})))].$$

定理 2 对于任何 $\phi(z,w;p)$，子集公理在 ZB 中是可证公式.

证明 在 ZB6 中令 $\psi_1(s,z)\leftrightarrow s=z,\psi_2(z,w,x;\vec{p})\leftrightarrow\phi(z,w;\vec{p})\wedge\exists v(\epsilon(z,x,v)\wedge w\leqslant v)$ 即得. □

实际上，子集公理是说，对模糊集 x 的每一个元素 z，都指定一个比它属于 x 的度较小的度，使 z 以此度属于新造的模糊集 y. 显然，这个 y 是 x 的子集.

作为子集公理的一个直接应用，可以证明模糊空集的存在性：

定理 3 $\exists ! y \forall z \forall w(\neg \varepsilon(z, y, w))$.

即任何元素 z 都不以任意的度属于这个 y，称这个唯一存在的 y 为模糊空集，记为 $\varnothing$.

由定理 2 还可以得到.

定理 4 若 $\psi(z;\vec{p})$ 是 ZB 中至少有一个自由变元的公式，则

$$\forall \vec{p} \forall x \exists ! y(\forall z \forall w(\varepsilon(z, y, w) \leftrightarrow \varepsilon(z, x, w) \wedge \psi(z;\vec{p}))).$$

此定理实际上更接近 ZF 中的子集公理.

以下要证明度的最小上界的存在性. 先给出两个定义：

定义 6 $\mathrm{Fsd}(x) \leftrightarrow x \neq \varnothing \wedge \forall z \forall w(\varepsilon(z, x, w) \rightarrow D(z))$

这个 x 是度的模糊集(fuzzy set of degrees).

定义 7
$$\begin{aligned} w = \sup(x) \leftrightarrow & \mathrm{Fsd}(x) \wedge D(w) \\ & \wedge \forall z \forall u(\varepsilon(z, x, u) \rightarrow z \leqslant w) \wedge \forall w'(D(w') \\ & \wedge \forall z \forall u(\varepsilon(z, x, u) \rightarrow z \leqslant w') \rightarrow w \leqslant w'). \end{aligned}$$

这个 w 是度的模糊集 x 的上确界.

定理 5 $\forall x(\mathrm{Fsd}(x) \rightarrow \exists ! w(w = \sup(x)))$.

此定理可以用 ZB6 和 ZB5 证明，因证明较长，限于篇幅，略去. 作为定理 5 的特例，考虑两个度 u 和 v，知存在唯一的 $w = \sup(\{u, v\})$. 我们给出以下定义.

定义 8 令 $D(u), D(v)$，则唯一的 $w = \sup(\{u, v\})$ 称为 u 和 v 的最小上界，记为 $u + v$.

前面已定义了模糊集的模糊联集，然而在那儿并没有定义两个模糊集合的模糊并集. 我们知道，在精确性经典集合论中，$a \cup b$ 被定义为 $\bigcup\{a, b\}$. 我们想平移这个定义，似乎应当考虑模糊性，就是说给定 x, y，我们可以有许多其元素仅是 x 和 y 的模糊集 $\{x, y\}_{u,v}$，因此，也就有许多不同的模糊并集，比如说定义 $x \cup_{u,v} y = \bigcup(\{x, y\}_{u,v})$ 似乎也是合理的. 然而，由这个定义，我们不能期望得到经典的结果的类似物，比如 $x \subseteq x \cup_{u,v} y$. 因为我们可以有一个元素以度 w 属于 x，但它却以较 w 为小的度 wu 属于 $x \cup_{u,v} y$.

作了这一番考察之后，我们发现最适宜的定义是 $x \cup y = \bigcup(\{x, y\})$. 此即，我们把两个模糊集的并集看作是一个标准集的联. 换句话说，在把两个模糊集归并为一时不存在模糊性，模糊性仅存在于各模糊集之本身. 由这个定义，我们看到精确性经典集合论中许多关于两个集合之并的结果，都可类推到 ZB 之中.

定理 6 $\forall a \forall b \forall u \forall v \forall w \forall z$

(i)$\varepsilon(z,a,u)\wedge\varepsilon(z,b,v)\rightarrow\varepsilon(z,a\cup b,u+v)$，

(ii)$\varepsilon(z,a,u)\wedge\forall v(\neg\varepsilon(z,b,v))\rightarrow\varepsilon(z,a\cup b,u)$，

(iii) $\varepsilon(z,a\cup b,w)\rightarrow\exists u(\varepsilon(z,a,u)\wedge u\leqslant w)$

$\quad\vee\exists v(\varepsilon(z,b,v)\wedge v\leqslant w)$.

定理 7 $\forall a\forall b\forall c\forall d$

(i)$a\cup b=b\cup a$，

(ii)$a\subseteq a\cup b$，

(iii)$a\subseteq b\leftrightarrow a\cup b=b$，

(iv)$a\cup a=a$，

(v)$a\cup\varnothing=a$，

(vi)$a\subseteq b\wedge c\subseteq d\rightarrow a\cup c\subseteq b\cup d$，

(vii)$(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$.

现在来定义模糊交. 为此，我们先使用如下公式的一个简记：

$$\begin{aligned}\psi(z,w;x)\leftrightarrow & D(w)\wedge\forall t(\exists u(\varepsilon(t,x,u))\\ &\rightarrow\exists v(\varepsilon(z,t,v)))\wedge\forall t\forall u\forall v(\varepsilon(t,x,u)\wedge\varepsilon(z,t,v)\\ &\rightarrow w\leqslant uv)\wedge\forall w'(D(w')\wedge\forall t\forall u\forall v(\varepsilon(t,x,u)\\ &\wedge\varepsilon(z,t,v)\rightarrow w'\leqslant uv)\rightarrow w'\leqslant w).\end{aligned}$$

显然，ψ 是以它的第二个变元 w 为结果的一个函数，即给定 z 和 x，只有唯一的一个 w(如果存在的话) 使 $\psi(z,w;x)$ 成立. 此时，我们可以利用子集公理得到下面结果：

$$\begin{aligned}\exists!y(\forall z\forall w(\varepsilon(z,y,w)\leftrightarrow & \exists v(\varepsilon(z,\textstyle\bigcup x,v)\\ &\wedge w\leqslant v)\wedge\psi(z,w;x))).\end{aligned}$$

定义 9 以上这个唯一的 y 记作 $\bigcap x$，称之为 x 的模糊交.

有些不同于精确性经典集合论的情况会发生. 我们考虑某个 t 以很小的度 u 属于 x，则 $\bigcap x$ 只能以 $\leqslant u$ 的度含有一切元素. 这样就可能有 $x\subseteq y$，但却 $\bigcap x\not\subseteq\bigcap y$，这与精确性经典集之交的性质相悖. 不过我们若按如下方式定义两个模糊集的模糊交之后，它们的性质却是与精确性经典集合论中两个集合之交集的性质相同.

定义 10 $a\cap b=\bigcap\{a,b\}$.

定理 8 $\forall a\forall b\forall z\forall w[\varepsilon(z,a\cap b,w)\leftrightarrow\exists u\exists v(\varepsilon(z,a,u)$

$\quad\wedge\varepsilon(z,b,v)\wedge w=uv)]$.

这个定理是显然的. 下面的这些性质则全是精确性经典集合论之定理的翻版.

定理 9 $\forall a\forall b\forall c\forall d$

(i) $a \cap b = b \cap a$,

(ii) $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$,

(iii) $a \cap b \subseteq a$,

(iv) $a \subseteq b \leftrightarrow a \cap b = a$,

(v) $a \cap a = a$,

(vi) $a \cap \varnothing = \varnothing$,

(vii) $a \subseteq b \wedge c \subseteq d \rightarrow a \cap c \subseteq b \cap d$,

(viii) $a \cup (a \cap b) = a$,

(ix) $a \cap (a \cup b) = a$.

最后，利用模糊正则公理，我们能证得如下定理：

定理 10 $\forall x \forall y[x \cup \{x\} = y \cup \{y\} \rightarrow x = y]$.

这条定理是说：x 的“后继”若与 y 的“后继”相等，则 x 与 y 相等. 显然，我们可以证明 $\forall z(z \cup \{z\} \neq z)$. 这与定理 10 一起，使我们得以保证满足模糊无穷公理 ZB9 的任何模糊集合 x，都必定含有无穷多个模糊集.

当然，我们还可以在 ZB 系统中定义更多的新概念，证明更多的定理，以致把模糊数学所需要的各种概念间的关系都一一刻画出来. 不过，一方面限于篇幅，我们不可能再去进行这种展开；另一方面，这种展开也不再属于数学基础的范畴，因而也不在本书讨论范围之内了.

我们更关心的却是这样一个问题，即本节开头所探讨的问题：能否将布尔值模型就当作是公理系统 ZB 的模型，从而就在这个意义上说，ZB 就是模糊集合论的恰当的公理化系统呢？以下的讨论表明，布尔值全域 $V^{(B)}$ 确实可以被看作是 ZB 的一个模型；而前文已指出，布尔值全域已经能被很好地看作是模糊集的全域，那么，模糊集合的全域也就能认为是 ZB 系统的模型. 或者反过来说，ZB 公理系统就是刻画模糊集合论的合适的形式系统.

首先不难证明 ZB 公理系统相对于 ZF 系统是相容的.

定理 11 若 ZF 相容，则 ZB 相容.

证明 将 ZB 这样解释到 ZF 中：把 $\varepsilon(x, y, w)$ 翻译作 $x \in y \wedge w = 1$，这样，ZB 的各公理都成为 ZF 中的公理. 所以，若 ZF 相容，则 ZB 相容. □

本节开始，我们已经用超穷递归的方法定义了布尔值全域 $V^{(B)}$. 我们再依 ε 层次递归地定义 V 在 $V^{(B)}$ 中的嵌入.

定义 11 $x = \{\langle 1', y\rangle \mid y \in x\}$，这儿 $1'$ 是布尔代数 B 中的最大元.

为使 $V^{(B)}$ 是 ZB 的模型，进行如下的解释：

(i)$\varepsilon(z,x,w)$ 解释为

$$z \in \mathrm{Dom}(x) \wedge w = \overline{x(z)},$$

(ii)$u \leqslant v$ 解释为

$$\exists u' \exists v'(u',v' \in B \wedge u' \leqslant' v' \wedge u = \overline{u'} \wedge v = \overline{v'})$$

其中 $\leqslant'$ 是 B 中的自然顺序.

定理 12 在上述解释下，$V^{(B)}$ 构成 ZB 的模型.

本定理的证明相当长，我们只能简要地叙述如下：

我们首先指出在该模型中的度就是 B 的元素在定义 11 中所确定映射之下的象 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 等等. 外延公理、函数化公理、序公理及对偶公理都不难得到.

为证明 $V^{(B)}$ 中的联集公理，假设 $x \in V^{(B)}$，我们定义 $f \in V^{(B)}$ 如下

$$\mathrm{Dom}(f) = \bigcup\{\mathrm{Dom}(t) \mid t \in \mathrm{Dom}(x)\},$$

且对于 $z \in \mathrm{Dom}(f)$，$f(z) = \sum_{t \in A_z} t(z) \cdot x(t)$，其中 $A_z = \{t \mid z \in \mathrm{Dom}(t) \wedge t \in \mathrm{Dom}(x)\}$，"$\cdot$"表示 B 中的乘法算子. 这样我们可证 f 符合公理中的要求，即刻画了 $\bigcup x$.

为证 $V^{(B)}$ 中替换公理模式，令 $x \in V^{(B)}$ 并定义 $y \in V^{(B)}$ 如下

$\mathrm{Dom}(y) = \{z \in V^{(B)} \mid \exists t(t \in \mathrm{Dom}(x) \wedge \psi_1(t,z)) \wedge \exists w(w \in B \wedge \psi_2(z,\overline{w}))\}$.

且 $z \in \mathrm{Dom}(y)$，$y(z)$ 为使得 $\psi_2(z,w)$ 成立的唯一 $w \in B$.

模糊子集关系的定义之解释为：x 是 $V^{(B)}$ 中 y 的模糊子集当且仅当 $\mathrm{Dom}(x) \subset \mathrm{Dom}(y)$ 且 $\forall z \in \mathrm{Dom}(x)(x(z) \leqslant' y(z))$. 为证明 $V^{(B)}$ 中的幂集公理，对于 $x \in V^{(B)}$ 定义 $y \in V^{(B)}$ 为：$\mathrm{Dom}(y) = \{z \in V^{(B)} \mid \mathrm{Dom}(z) \subseteq \mathrm{Dom}(x) \wedge \forall t(t \in \mathrm{Dom}(z) \to z(t) \leqslant' x(t))\}$，且对于任何 $z \in \mathrm{Dom}(y)$，有 $y(z) = 1'$.

正则公理被下述论断所证实：若 $x \in V^{(B)}$ 且 $x \neq \varnothing$，则 $\exists z \in \mathrm{Dom}(x)$ 满足 $\mathrm{Dom}(z) \cap \mathrm{Dom}(x) = \varnothing$. 最后，无穷公理可以利用通常的归纳法来定义而满足：$f_0 = \varnothing$，$f_{n+1}:\{f_0,\cdots,f_n\} \to \{1'\}$，以及 $x:\{f_n \mid n \in \omega\} \to \{1'\}$. 这个 x 即为所断定存在的无穷集.

这就完成了本定理的证明.

最后还可指出一点，在这个模型中(以及更一般地，在 ZB 中)，以度 $\overline{0'}$(最小度)的隶属并不是严格地与"非隶属"同样，当然这将与 Zadeh 模糊集合论不相吻合. 然而我们可以从"外部"就将最小度的隶属看成是非隶属.

5.4 中介数学系统

至此,我们已讨论了两种为模糊数学奠基的方案:其一是直接利用精确性经典数学的所有工具和方法,来构造各种数学结构(它们仍然是经典数学的数学结构),以表示我们所期望的模糊数学应具有的各种特征,也就是直接奠基于精确性经典数学之上的方案.其二则是独立于已有的精确性数学之外,重新专为模糊数学构造一个公理化集合论系统ZB.然而我们要指出,配套于ZB的逻辑工具仍然是经典的二值逻辑系统.我们知道,二值逻辑是为刻画那类非此即彼、非真即假的判断而建立的;而模糊现象却并不具有如此的特性.因而,用二值逻辑作为逻辑工具来构建刻画模糊现象的公理系统,与用精确性集合论工具来刻画模糊现象一样,虽也可以取得成功,却依然难于充分体现模糊性.

为了改变这种状况,应该构建特有的反映模糊性的逻辑系统,再以这个逻辑系统为配套的推理工具,建立特别反映模糊性的集合论系统.这项工作已经完成,这就是本节中将要介绍的中介数学系统.

我们之所以把该系统称为"中介数学系统",而不称为"模糊数学系统",一是以示它与现有通行的直接奠基于精确性经典数学之上的模糊数学有重大的区别,二来也指明该系统建基于"中介原则"之上.中介原则是说:有些谓词是有一类所谓中介对象的,即该对象对这个谓词而言,既不能说是严格意义下的"真",也不能说是严格意义下的"假",我们将一律称之为"中介"状态.

这样,我们首先就应建立具有三种真值(即真、中、假)的逻辑系统以直接反映中介原则.中介逻辑演算系统(Medium Logic,简记为ML)就是这样的逻辑演算系统.ML由中介逻辑的命题演算系统MP及其扩张系统MP*、中介逻辑的谓词演算系统MF及其扩张系统MF*、中介同异性演算系统ME、ME*组成.在ML中,我们直接引入对立否定词$\neg$和模糊否定词$\sim$,其含义是:对于谓词$P(\cdot)$,如果$P(x)$为假,就说$\neg P(x)$真;如果$P(x)$为中介,则说$\sim P(x)$真.中介逻辑的命题演算系统MP除了它的形成规则及其归纳定义之外,共有十二条形式推理规则,其中只有肯定前提律($\in$)、传递律(τ)和反证律($\urcorner$)(注意否定词$\urcorner$在MP中被定义为$\urcorner P = P \rightarrow \sim P$,即$\neg P \vee \sim P$)已为经典二值逻辑系统所具有,其余皆为中介逻辑演算系统所特有.具体内容请读者参见文献[82].

为了下面阅读的方便,我们再指出ML中几个符号的含义.我们用

$A \mathrel{\Dashv\!\vDash} B$ 表示两个合式公式 A 与 B“等值”，即对于任何指派，A 的真值与 B 的真值完全相同. 注意它与二值逻辑中 $A \mathrel{\dashv\!\vdash} B$ 的意义相当，但在中介逻辑中，$A \mathrel{\dashv\!\vdash} B$ 却不再表示 A 与 B 等值，而只表示：A 真时 B 一定真，B 真时 A 也一定真，但 A 取中或假值时，对 B 就没有限制要求了. 我们在 MP* 中证明了，AB 当且仅当：(1) $A \vdash B$ 且 $\sim A \vdash \sim B$ 且 $\urcorner A \vdash \urcorner B$，或者 (2) $A \mathrel{\dashv\!\vdash} B$ 且 $\urcorner A \mathrel{\dashv\!\vdash} \urcorner B$，或者 (3) $A \asymp B$ 是永真式.

现在，我们就来简略介绍中介数学系统中的中介公理集合论 (Medium Axiomatic Set Theory，简记为 MS) 的内容. 由于内容较多，依发表时的顺序分为六小节叙述.

首先，中介公理集合论系统 MS 除承认和使用中介逻辑演算系统的全部形式符号、定义符号和推理规则外，还要引入两个基本的常谓词：其一是二元谓词 $\in$，解释并读为“属于”，其二是一元常谓词 $\mathfrak{M}$，解释并读为“小”.

5.4.1 两种谓词的划分与定义

先给出精确谓词和模糊谓词这两个重要概念在 MS 中的形式定义，并讨论和建立 MS 的外延性公理和对偶公理.

公理 Ⅰ(外延性公理) $a = b \asymp \forall z(z \in a \asymp z \in b)$.

这条公理相当于 ZFC 中的外延公理，但在 MS 中，a 与 b 的相等由任何元素属于两者都要等值来决定.

定义 1(子集) $a \subseteq b \Leftrightarrow_{df} \forall z(z \in a \prec z \in b)$.

定义 2(真子集) $a \subset b \Leftrightarrow_{df} a \subseteq b \wedge (a \neq b \vee a \simeq b)$.

定理 1 $a = b \asymp a \subseteq b \wedge b \subseteq a$.

公理 Ⅱ(对偶公理) $\exists c \forall x(x \in c \asymp \measuredangle(x = a \vee x = b))$.

定义 3(对偶集) $x \in \{a, b\} \Leftrightarrow_{df} \measuredangle(x = a \vee x = b)$.

定义 4(单点集) $\{a\} =_{df} \{a, a\}$.

定义 5(有序对) $\langle a, b\rangle =_{df} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

定义 6(单点序) $\langle a\rangle =_{df} a$.

定义 7(有序组) $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle =_{df} \langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle, n = 2, 3, 4, \cdots$.

以上这些定义都是 ZFC 系统中相应定义的简单平移，但是都必须考虑到被定义式取真、假值以及取中值的情况下的合理性. 以下则要引入 MS 中特有的“模糊谓词”和“清晰谓词”概念了.

定义 8(模糊谓词) $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{fuz}} P \Leftrightarrow_{df} \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n (\overset{\circ}{\sim} P(x_1, \cdots, x_n; t_1, \cdots, t_r))$.

定义 9(清晰谓词) $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{dis}} P \Leftrightarrow_{df} \urcorner \underset{(x_1,\cdots,x_n)}{\text{fuz}} P$.

我们说谓词 P 对于它的变元 $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ 是模糊的，是指有一组该元的值使得 P 取中值. 在定义 8 中，谓词 P 之前的模糊否定词之所以不取 $\sim$，而取清晰化后的 $\sim$，是要保证 $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{fuz}}\ P$ 这个谓词本身不再是模糊谓词. 否则的话，“P 是模糊谓词”也不能确定真假，那就太复杂了. 事实上，在这两个定义之下，我们有

定理 2 $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{dis}}\ P \Leftrightarrow \forall x_1 \cdots \forall x_n[P(x_1,\cdots,x_n;t) \vee \neg P(x_1,\cdots,x_n;t)]$

定理 3 $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{fuz}}\ P \vee \underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{dis}}\ P.$

定理 3 恰好反映了我们的意愿：一个谓词要么是模糊谓词，要么是清晰谓词，而不可能有这两者的中介. 这也说明，我们虽认为有许多反对对立均具有中介过渡，但并不坚持认为一切反对对立均具有中介过渡，这儿的“模糊”与“清晰”这一对反对对立面就是一例. 有了清晰、模糊谓词，我们不难定义清晰集和模糊集，并且可以证明已经定义过的一些集合的清晰性.

定义 10(清晰集) $\text{dis}a \Leftrightarrow_{\text{df}} \underset{x}{\text{dis}}(x \in a).$

定义 11(模糊集) $\text{fuz}a \Leftrightarrow_{\text{df}} \underset{x}{\text{fuz}}(x \in a).$

定理 4 $\text{dis}\{a,b\}.$

定理 5 $\text{dis}\langle a_1,\cdots,a_n\rangle (n \geqslant 2).$

定理 6 $\text{dis}a \wedge \text{dis}b \Rightarrow a \subseteq b \vee a \not\subseteq b$

这儿 $a \not\subseteq b$ 是 $\neg(a \subseteq b)$ 的缩写. 此定理说，a 与 b 都是清晰集，$a \tilde{\subseteq} b$(即 $\sim(a \subseteq b)$) 就不可能发生，同样 $a \simeq b$(即 $\sim(a = b)$) 也不可能发生，见下面的定理.

定理 7 $\text{dis}a \wedge \text{dis}b \Rightarrow a = b \vee a \neq b.$

最后，我们可以期望有序对 $\langle a,b\rangle$ 具有与 ZFC 中之有序对有类同的性质，即下述定理 8，该定理的证明比较长且有一定的复杂性.

定理 8 $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \asymp (a = c \wedge b = d).$

5.4.2 集合的运算

我们将在本段建立“恰集”这一重要概念，并且引入由集合造出新集的若干运算，包括联、交、外集、中介集、清晰集、卡氏积、幂集等. 其中，外集、中介集、清晰集是 ZFC 系统所没有的.

定义 12(恰集) $a\ \underset{x}{\text{ex}}\text{a}P(x,t) \Leftrightarrow_{\text{df}} \forall x(x \in a \asymp P(x,t))$. 此即，$a$ 是谓词关于变元 x 的恰集，是指 $x \in a$ 的真值与 $P(x)$ 的真值完全相同.

定理 9 $a \operatorname{e\underset{\cdot}{x}a} P(x,t) \wedge b \operatorname{e\underset{\cdot}{x}a} P(x,t) \rightarrow a = b$.

此定理表明一个谓词关于某变元的恰集是唯一的，这使下面的记号成为合法.

定义 13(恰集简记) $a = \{x \mid P(x,t)\} \Leftrightarrow_{df} a \operatorname{e\underset{\cdot}{x}a} P(x,t)$.

以下将利用恰集简记来引入一系列的集合运算.

公理 Ⅲ(联集公理) $\exists b(b = \{x \mid \exists y(y \in a \wedge x \in y)\})$.

定义 14(联集) $\bigcup a =_{df} \{x \mid \exists y(y \in a \wedge x \in y)\}$.

定义 15(联) $a \cup b =_{df} \bigcup \{a,b\}$.

定义 16(多元集) $\{a_1,\cdots,a_{n-1},a_n\} =_{df} \{a_1,\cdots,a_{n-1}\} \cup \{a_n\}, n = 3,4,\cdots$

注意联与联集的区别：给定 a，a 的联集 $\bigcup a$ 是用 a 的元素的元素为元素的；而对于两个集合 a 和 b，它们的联 $a \cup b$ 是用 a 的元素以及 b 的元素作元素的.

不难想见，当 a 是清晰集，a 的元素也是清晰集时，联集 $\bigcup a$ 也是清晰集；当 a，b 都是清晰集时，a 与 b 的联 $a \cup b$ 也是清晰集. 这反映在以下定理中：

定理 10 $\operatorname{dis}a \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow \operatorname{dis}x) \rightarrow \operatorname{dis} \bigcup a$.

定理 11 $\operatorname{dis}a \wedge \operatorname{dis}b \Rightarrow \operatorname{dis}(a \cup b)$.

定理 12 $a \cup b = \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$.

定理 12 在 ZFC 系统中是很显然的，但在 MS 中，由于命题可取中值，情况就变得复杂了. 依照前面的定义，我们须证 $\exists y(y \in \{a,b\} \wedge x \in y) \dashv\vdash x \in a \vee x \in b$，可以通过如下 4 个推理的证明而证之：(1) $\exists y(y \in \{a,b\} \wedge x \in y) \vdash x \in a \vee x \in b$，(2) $x \in a \vee x \in b \vdash \exists y(y \in \{a,b\} \wedge x \in y)$，(3) $\neg \exists y(y \in \{a,b\} \wedge x \in y) \vdash \neg(x \in a \vee x \in b)$，(4) $\neg(x \in a \vee x \in b) \vdash \neg \exists y(y \in \{a,b\} \wedge x \in y)$.

紧接着的交集运算与上面平行展开.

公理 Ⅳ(交集公理) $\exists b(b = \{x \mid \forall y(y \in a \prec x \in y)\})$.

定义 17(交集) $\bigcap a =_{df} \{x \mid \forall y(y \in a \prec x \in y)\}$.

定义 18(交) $a \cap b =_{df} \bigcap \{a,b\}$.

定理 13 $\operatorname{dis}a \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow \operatorname{dis}x) \Rightarrow \operatorname{dis} \bigcap a$.

定理 14 $\operatorname{dis}a \wedge \operatorname{dis}b \Rightarrow \operatorname{dis}(a \cap b)$.

定理 15 $a \cap b = \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$.

下一个要定义的集合运算是"外集"，即素朴集合论中的补集. 我们知道，在 ZFC 系统中，通常的一个集合之补不再是 ZFC 中的集合，因若承认补集的存在将会在 ZFC 之中引起悖论. 所以只能讨论差集或相对补

集. 然而从我们的思维规律看，有了集合，立即就会想到它的（绝对）补集，这是很自然的事. 在 ZFC 中不允许补集的存在是为了避免悖论，而不是对思维规律的最恰当的反映；当我们能用其他的办法（不是像 ZFC 系统，用限制集合大小的办法）避免悖论之时，我们当然希望引入补集运算，现在我们更确切地称之为“外集”：

公理 Ⅴ（外集公理） $\exists b(b = \{x \mid x \not\in a\})$.

定义 19（外集） $a =_{df} \{x \mid x \not\in a\}$.

下面这几条关于外集运算的性质是易证的.

定理 16 $a \quad - a$.

定理 17 $(a \cup b) = a^{-} \cap b$.

定理 18 $(a \cap b) = a \cup b$.

定理 19 $\text{dis}a \asymp \text{dis}a$.

外集是把集合外面的元素（即不属于 a 的元素）变为本身内部的元素. 下面的中介集则是把“中介属于”某集合的元素汇集而成的集（当然，同时也把集合外部的和内部的元素都变为中介集的“中介对象”）.

公理 Ⅵ（中介集公理） $\exists b(b = \{x \mid x \mathrel{\tilde{\in}} a\})$.

定义 20（中介集） $a^{\sim} =_{df} \{x \mid x \mathrel{\tilde{\in}} a\}$.

定理 20 $a^{-\sim} = a^{\sim}$.

定理 21 $a \quad = a \cup a$.

定理 22 $(a \cup b) = (a \cap b^{\sim}) \cup (a^{\sim} \cap b) \cup (a \cap b^{\sim})$.

定理 23 $(a \cap b)^{\sim} = (a \cap b^{\sim}) \cup (a^{\sim} \cap b) \cup (a \cap b^{\sim})$.

正像中介逻辑演算系统 ML 中有清晰化算符一样，在我们的中介公理集合论中也将引进清晰算子，它可将任何集合改造成清晰集

公理 Ⅶ（清晰集公理） $\exists b(b = \{x \mid ⊿(x \in a)\})$.

定义 21（清晰化集） $a^{\circ} = \{x \mid ⊿(x \in a)\}$.

所谓 a 的清晰化集，是将 a 的边界上的中介对象和外部元素全都推向外部，内部元素保持不变而形成的清晰集. 清晰化集一定是清晰的.

定理 24 $\text{dis}a^{\circ}$.

定理 25 $\text{dis}a \Rightarrow a^{\circ} = a$.

定理 26 $a^{\circ\circ} = a^{\circ}$.

定理 27 $x \in a \Leftrightarrow x \in a^{\circ}$.

定理 28 $a^{\circ} = (a \cup a^{\sim})^{\circ}$.

定理 29 $(a \cup b)^{\circ} = a^{\circ} \cup b^{\circ}$.

定理 30 $(a \cap b)^{\circ} \quad a^{\circ} \cap b^{\circ}$

为了以后使用的方便，我们还定义一个集合的“缩集”如下：

定义 22(缩集) $a{\downarrow} =_{\mathrm{df}} a \quad \cap a.$

定理 31 (1) $x \in a \to x \tilde{\in} a{\downarrow}$,

(2)$x \tilde{\in} a \to x \notin a{\downarrow}$,

(3)$x \notin a \to x \notin a{\downarrow}$.

仿照 ZFC，我们再引入卡氏积和幂集.

公理 Ⅷ(卡氏积公理) $\exists c(c = \{x \mid \exists y \exists z(y \in a \wedge z \in b \wedge \measuredangle x = \langle y,z\rangle)\})$.

定义 23(卡氏积) $a \times b =_{\mathrm{df}} \{x \mid \exists y \exists z(y \in a \wedge z \in b \wedge \measuredangle x = \langle y, z\rangle)\}$.

定理 32 $\mathrm{dis}a \wedge \mathrm{dis}b \to \mathrm{dis}(a \times b)$.

公理 Ⅸ(幂集公理) $\exists b(b = \{x \mid x \subseteq a\})$.

定义 24(幂集) $\mathscr{P}a =_{\mathrm{df}} \{x \mid x \subset a\}$.

定义 25(幂清晰集) $\mathscr{F}a =_{\mathrm{df}} (\mathscr{P}a)^{\circ}$.

5.4.3 谓词与集合

本段将给出“概集”这个重要概念的形式定义，并讨论和建立 MS 的泛概括公理、替换公理、选择公理和后继恰集公理，其中泛概括公理的建立和讨论是本段的中心内容，也是整个 MS 系统的一个中心内容.

定义 26(概集) $a \,\underset{\cdot}{\mathrm{com}} P(x,t) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x((P(x,t) \Rightarrow x \in a) \wedge (\urcorner P(x,t) \Rightarrow x \notin a))$.

定义 27(正规谓词) (i) 若 x, y 是项，则 $x \in y$, $x \quad y$ 都是正规谓词，

(ii) 若 P、Q 是正规谓词，则 $P \to Q$, $\urcorner P$, $\sim P$ 都是正规谓词，

(iii) 若 $P(a;t)$ 是正规谓词，个体词 a 在其中出现，x 不在其中出现，以 x 替换 a 的所有出现(相应地，部分出现)，则 $\forall xP(x,t)$(相应地，$\exists xP(x,t)$)是正规谓词.

MS 中的谓词是正规谓词，当且仅当它能由上述形成规则(i)(ii)(iii)经有限步生成. P 是 MS 中的正规谓词记为 $\mathrm{Nor}P$.

由此定义知，凡 MS 中谓词含有 $\prec$ 或 $\mathfrak{M}$，或含有定义符号 $\asymp$、$\Rightarrow$、$\measuredangle$、$\overset{\circ}{\sim}$、$\overset{\circ}{\urcorner}$ 时，该谓词就不是正规谓词.

公理 Ⅹ(泛概括公理) 对任何 $\mathrm{Nor}P$，只要其中不含 a 的自由出

现，则

$\exists a(a\ \underset{t}{\mathrm{com}}\ \exists x_1\cdots\exists x_n(\not\angle_{\circ}(x = \langle x_1,\cdots,x_n\rangle \wedge P(x_1,\cdots,x_n;t)))$.

定理33(**泛概括定理**)　对于任何Nor$P(x,t)$，只要其中不含a的自由出现，则 $\exists a(a\ \underset{t}{\mathrm{com}}P(x,t))$.

此定理就是 Cantor 概括原则的推广. 它断言，对于任何正规谓词$P(x)$，不管它是清晰的，或是模糊的，我们都可以用它来造集，这个集的元素是如此确定的：凡满足 $P(x)$，亦即使该谓词为真者，就在集合的内部；凡满足ㄱ$P(x)$，亦即使该谓词为假者，就在集合的外部，但要注意，凡满足 $\sim P(x)$ 者，亦即使得该谓词取中值者，我们没有肯定落在集合的何处. 事实上，我们允许它们落在集合外部、内部或边界上. 这样生成的集合当然不是唯一的，我们将它们都称为谓词 P 的概集. 初看起来，这种由谓词仅能造概集的规定不符合 Cantor 概括原则的要求，因为依据概括原则，任给谓词，应该能造相应的恰集. 不过，当把谓词限定为清晰谓词之时，就能得出所要求的结论了，对此请参阅下文 5.5.4 的相关内容，在那里将会有更直观的认识和理解.

定理 34　$\underset{t}{\mathrm{dis}}P(x)\wedge a\ \underset{t}{\mathrm{com}}P(x) > \mathrm{dis}a \wedge a\ \underset{t}{\mathrm{exa}}P(x)$.

定理 35　对任何 Nor$P(x,t)$，只要其中不含 a 的自由出现，则 $\underset{t}{\mathrm{dis}}P(x,t) > \exists a(a\ \underset{t}{\mathrm{exa}}P(x,t))$.

因为不难看出，Cantor 所用来造集的谓词全都是 MS 中的正规清晰谓词，故定理 35 表明 MS 中全面保留了 Cantor 意义下的概括原则. 至于为什么 Cantor 的概括原则会引起悖论（例如 Russell 悖论），而我们在 MS 中同样使用之却不会引起悖论，将在 5.4.6 中专门讨论.

现在我们用这两条定理来构造全集和空集，并初步讨论全集与空集的性质.

定理 36　$\exists a(a\ \underset{x}{\mathrm{exa}}(x = x))$.

定义 28(**全集**)　$V =_{\mathrm{df}} \{x \mid x = x\}$.

定理 37　$\forall x(x \in V)$.

定义 29(**空集**)　$\varnothing =_{\mathrm{df}} V$.

定理 38　$\forall x(x \notin \varnothing)$.

定理 39　$V = \varnothing$.

定理 40　(1) $\forall x(x \mathrel{\widetilde{\in}} V)$，(2) $\forall x(x \mathrel{\widetilde{\in}} \varnothing)$.

定理 41　$\forall x(x \notin a) \prec a = \varnothing$.

定理 42　$\mathrm{dis}a \rightarrow a^{\sim 0} = \varnothing$.

定理 43　$\varnothing^{0} = V^{\sim 0} = \varnothing$.

为了给出替换公理，须先定义单值谓词.

定义 30(单值谓词)　$\underset{(x_1, x_2)}{\mathcal{U}n}\ \varphi(x_1, x_2, t) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3(\varphi(x_1, x_2, t) \wedge \varphi(x_1, x_3, t) \Rightarrow x_2 = x_3)$.

公理 XI(替换公理)　对任何 $\underset{(x_1, x_2)}{\mathcal{U}n}\ \varphi(x_1, x_2, t)$，只要其中没有 b 的自由出现，则

$\forall a[\mathfrak{M}(a) \Rightarrow \exists b(\mathfrak{M}(b) \wedge b\ \underset{y}{\mathrm{exa}}(\exists x(x \in a^\circ \wedge \varphi(x, y, t))))]$.

替换公理是说，对于任何小集 a，可以用单值谓词 φ 将其内部的元素换为其他元素，从而形成新的小集 b，这个新集称为 a 被 φ 替换而得的替换集.

定义 31(替换集)　$\underset{\varphi(x,y)}{\mathrm{rep}a} =_{\mathrm{df}} \{y \mid \exists x(x \in a^\circ \wedge \varphi(x, y))\}$，其中 $\varphi(x, y)$ 是单值谓词.

由替换公理不难得出如下的子集定理：

定理 44　$\mathfrak{M}(a) \Rightarrow \exists b(\mathfrak{M}(b) \wedge b\ \underset{y}{\mathrm{exa}}(y \in a^\circ \wedge \psi(y)))$.

下面再给出 MS 中的选择公理.

定义 32(么元素集)　$I(a) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists x(a = \{x\})$.

公理 XII(选择公理)　$\mathfrak{M}(a) \wedge \forall x \forall y((x \in a \wedge y \in a \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow x \cap y = \varnothing) \Rightarrow \exists b(\mathfrak{M}(b) \wedge \forall x(x \in a \wedge x \neq \varnothing \Rightarrow I(b \cap x)))$.

这就是说，如果小集 a 中任何元素两两不交，则可以找到一个"选择集"b，它也是小集，且 b 与 a 中每个元素之交为单点集. 注意元素两两不交的刻画是$(x \in a \wedge y \in a \wedge \neg(x = y)) \Rightarrow x \cap y = \varnothing$，而不是$(x \in a \wedge y \in a \wedge ╕(x = y)) \Rightarrow x \cap y = \varnothing$，因为依后一条件，有时将找不到选择集 b.

以下我们来讨论后继、后继集和后继恰集，然后给出后继恰集公理，由后继恰集的存在性立即可推出无穷集合的存在. 所以在 MS 中我们不再另列无穷公理.

定义 33(后继)　$a^+ =_{\mathrm{df}} a \cup \{a\}$.

定义 34(后继集)　$b\ \mathrm{suc}\ a \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} a \subseteq b \wedge ⊿\ \forall x(x \in b \prec x^+ \in b)$.

定理 45　$\forall a \exists b(b\ \mathrm{suc}\ a)$.

定理 46　$\sim (b\ \mathrm{suc}\ a) \Leftrightarrow \sim (a \subseteq b) \wedge \forall x(x \in b \prec x^+ \in b)$.

公理 XIII(后继恰集公理)　$\mathfrak{M}(a) \Rightarrow \exists b[\mathfrak{M}(b) \wedge b\ \underset{x}{\mathrm{exa}} \forall y(y\ \mathrm{suc}\ a \prec x \in y)]$.

定义 35(后继恰集)　$a^{\#} =_{\mathrm{df}} \{x \mid \mathfrak{M}(a) \wedge \forall y(y\ \mathrm{suc}\ a \prec x \in y)\}$.

所谓后继恰集，是针对小集才设置的. 实际上，小集 a 的后继恰集是

a 的所有后继集之交，也就是 a 的"最小后继集"，这一点将在后面证明．如果我们能把 a 的所有后继集组成一个集合 S，那么后继恰集 $a^{\sharp}$ 就是 S 的交集 $\bigcap S$，然而遗憾的是，我们做不到这一点，即无法用泛概括公理或其他公理将 a 的所有后继集聚拢为一集，所以我们需要后继恰集公理．

定理 47 $\neg\mathfrak{M}(a)\Rightarrow a^{\sharp}=\varnothing$.

定理 48 $\mathfrak{M}(a)\Rightarrow a\subseteq a^{\sharp}$.

定理 49 $\forall x(x\in a^{\sharp}\rightarrow x^{\prime}\in a^{\sharp})$.

定理 50 $\mathfrak{M}(a)\Rightarrow a^{\sharp}\ \mathrm{suc}\ a$.

定理 50 是定理 48、定理 49 的直接结论，它表明小集的后继恰集必是后继集．我们还可证：

定理 51 $\mathfrak{M}(a)\Rightarrow\exists b(\mathfrak{M}(b)\wedge(b\ \mathrm{suc}\ a))$.

定理 52 $\forall y(y\ \mathrm{suc}\ a\rightarrow a^{\sharp}\subseteq y)$.

这又表明，a 的后继恰集是 a 的所有后继集的子集，因而（再加上定理 50）是 a 的一个最小后继集．

定理 53 $\mathfrak{M}(a)\Rightarrow\forall x(x\in a^{\sharp}\Leftrightarrow(x\in a\vee\exists y(y\in a^{\sharp}\wedge y^{\prime}=x)))$

此定理又指出，小集 a 的后继恰集 $a^{\sharp}$ 中任何元素，要么是 a 的元素，要么是 $a^{\sharp}$ 中别的某元素的后继，而无其他什么元素．这从另一角度刻画了后继恰集的极小性．

最后，我们还通过如下几条定理指出，清晰小集的后继恰集仍是清晰小集．

定理 54 $\mathrm{dis}\ a\wedge b\ \mathrm{suc}\ a\Rightarrow b^{\circ}\ \mathrm{suc}\ a$.

定理 55 $\mathrm{dis}\ a\rightarrow\mathrm{dis}\ a^{\sharp}$.

定理 56 $\mathfrak{M}(a)\wedge\mathrm{dis}\ a\Rightarrow\exists b(\mathfrak{M}(b)\wedge\mathrm{dis}\ b\wedge b\ \mathrm{suc}\ a)$.

后继恰集 $a^{\sharp}$ 即为定理 56 中存在的 b.

这样，如果我们取 $a=\varnothing$，则知后继恰集 $\varnothing^{\sharp}$ 是小集，且是清晰集，它就是 ZF 中的 ω.

5.4.4 小集与巨集

本段引入小集与巨集的概念．虽然前文已出现了小集符号 $\mathfrak{M}$，并在后继恰集处讨论了它的一些性质，但还没有系统全面地刻画这一基本概念．本段将用一系列公理来完成这种刻画，同时也就结束了构造 MS 整体框架的工作．

公理 XⅣ（清晰公理） $\mathrm{dis}\,\mathfrak{M}(x)$.

即,“小集”这个概念认定为清晰的. 当然,这只是我们把自己的工作限定在清晰范畴内,以求得问题的简化;并不排除以后再发展为考虑“小集”、“巨集”、“中集”的可能性.

定义 36(巨集) $\mathrm{GI}(a) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \urcorner \mathfrak{M}(a)$.

公理 XV(巨集公理) $\mathrm{GI}(a) \vee \mathrm{GI}(a^{\sim}) \vee \mathrm{GI}(a)$.

公理 XVI(小清晰公理) $\mathfrak{M}(a) \Leftrightarrow \mathfrak{M}(a^{\circ})$.

公理 XVII(单点小集公理) $I(a) \Rightarrow \mathfrak{M}(a)$.

公理 XVIII(小联集公理) $\mathfrak{M}(a) \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow \mathfrak{M}(x)) \Rightarrow \mathfrak{M}(\bigcup a)$.

公理 XIX(小交集公理) $\mathfrak{M}(a) \wedge \exists x(x \in a \wedge \mathfrak{M}(x)) \Rightarrow \mathfrak{M}(\bigcap a)$.

这一系列公理指明了我们约定哪些集合是小集,它们的意义都是清楚明白的. 由它们出发,我们可以证明以下这些集合的“小集性”.

定理 57 $\mathfrak{M}(\{a,b\})$.

定理 58 $\mathfrak{M}(a) \wedge \mathfrak{M}(b) \to \mathfrak{M}(a \cup b)$.

定理 59 $\mathfrak{M}(a) \vee \mathfrak{M}(b) \to \mathfrak{M}(a \cap b)$.

定理 60 $\mathfrak{M}(a) \wedge b \subseteq a \to \mathfrak{M}(b)$.

定理 61 $\mathfrak{M}(\varnothing)$.

定理 62 $\mathrm{GI}(V)$.

定理 63 $\mathfrak{M}(\{a_1, a_2, \cdots, a_n\})$.

我们已经讨论了空集、单点集、多元集,以及在一定条件下小集的并、交、子集等都具有小集性. 我们知道,当 a 是小集时,a 的清晰集 a° 也是小集,但 a 及 a^{-} 不一定是小集,并且 $a^{\sim}$ 与 a 中至少有一个是巨集. 所以,小集的概念是针对集合的“内部”元素多少而定的,它与其边界上的元素和外部元素无关.

为了讨论余下的幂集运算、卡氏积运算的小集性,我们又需加入新公理,这也是 MS 中最后一条公理:

公理 XX(小幂集公理) $\mathfrak{M}(a) \wedge \mathfrak{M}(a^{\sim}) \Rightarrow \mathfrak{M}(\mathscr{P}a)$.

这是说:当 a 和 a 的中介集 $a^{\sim}$ 均为小集时,a 的幂集 $\mathscr{P}a$ 也是小集,初看起来,只需规定 $\mathfrak{M}(a)$,即可认为 $\mathfrak{M}(\mathscr{P}a)$;然而在经典集合论中成立的事实到中介集合论中将变得复杂起来;如果不规定 $\mathfrak{M}(a^{\sim})$,那么 a 的子集中可以有许多许多个其“内部”元素相同,但“边界”元素各不相同(它们仍算是不同的子集),所以此时就不能保证其幂集 $\mathscr{P}a$(以 a 的这些子集为元素)仍是小集了. 不过,当 a 是清晰集时,我们只需 a 是小集即可保证 $\mathscr{P}a$ 是小集.

定理 64 $\mathfrak{M}(a) \wedge \mathrm{dis}\ a \to \mathfrak{M}(\mathscr{P}a)$.

定理 65　$\mathfrak{M}(a) \Rightarrow \exists b(\mathfrak{M}(b) \wedge b\ \underset{x}{\mathrm{exa}}(x \subseteq a^{\circ} \wedge \mathrm{dis}\ x))$.

对于小集 a，我们可以把 a 的清晰集 a° 的一切清晰子集 x 概括成小集 b，这个小集称为 a 的清晰幂集，注意它与定义 25 中的幂清晰集有所不同.

定义 37(清晰幂集)　$\mathscr{P}d(a) =_{\mathrm{df}} \{x \mid \mathfrak{M}(a) \wedge x \subseteq a^{\circ} \wedge \mathrm{dis}\ x\}$.

易证以下两条定理.

定理 66　$\mathfrak{M}(\mathscr{P}d(a))$.

定理 67　$\mathrm{dis}(\mathscr{P}d(a))$.

最后来讨论卡氏积的小集性. 为此，只需用某个小集作为 $a \times b$ 的扩集即可，我们通过下面的各定理做到这一点：

定理 68　$\mathfrak{M}(a) \wedge \mathfrak{M}(b) \wedge x \in a \wedge y \in b \Rightarrow \langle x, y\rangle \in \mathscr{P}d(\mathscr{P}d(a \cup b))$.

定理 69　$\mathfrak{M}(a) \wedge \mathfrak{M}(b) \Rightarrow (a \times b)^{\circ} \subseteq \mathscr{P}d(\mathscr{P}d(a \cup b))$.

定理 70　$\mathfrak{M}(a) \wedge \mathfrak{M}(b) \Rightarrow \mathfrak{M}(a \times b)$.

至此，各种运算之后对于集合小集性的影响讨论完毕.

5.4.5　MS 与 ZFC 之间的关系

如所知，作为精确性经典数学的理论基础的 ZFC 公理集合论系统，通常包括外延、对偶、空集、联集、幂集、替换、分出、无穷、选择、正则等 10 条非逻辑公理. 但其中分出公理可由替换公理推出，而正则公理又仅是为避免悖论而设置的，对于由 ZFC 推出整个精确性经典数学不起作用. 所以，我们只要在 MS 中对个体和谓词加以适当限制后，能把上述 10 条公理中除正则公理和分出公理之外的各条公理均作为定理推出，就表明整个精确性经典数学也能奠基于 MS. 但同时，MS 还研究和处理模糊谓词和模糊集合等模糊性量性对象，因为 MS 在中介原则和泛概括公理的观点下，不仅承认中介对象的存在，同时还接受模糊造集谓词的使用. 因而，可以更广泛地说，MS 已经成为精确经典数学和研究模糊现象的不确定数学的共同基石.

我们首先指出，若将中介逻辑演算系统 ML 中的形式符号 $\neg$、$\Rightarrow$、$\forall$、$=$ 分别视为经典二值逻辑中的否定词、蕴涵词、全称量词及等词，则经典二值逻辑便是 ML 的子系统，因为这些逻辑联结词满足下列推理规则[104]：

$(\in)$ $A_1, \cdots, A_n \vdash A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$.

(τ) 如果 $\Gamma \vdash \triangle$(不空) $\vdash A$，则 $\Gamma \vdash A$.

$(\neg)$ 如果 $\Gamma, \neg A \vdash B, \neg B$，则 $\Gamma \vdash A$.

$(\Rightarrow_-)$ $A \Rightarrow B, A \vdash B$.

$(\Rightarrow_+)$ 若 $\Gamma, A \vdash B$，则 $\Gamma \vdash A \Rightarrow B$.

$(\forall_-)$ $\forall x A(x) \vdash A(a)$.

$(\forall_+)$ 如果 $\Gamma \vdash A(a)$，a 不在 Γ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x A(x)$.

(I_-) $A(a), a = b \vdash A(b)$，其中 $A(b)$ 是由 $A(a)$ 中 a 的某些出现替换为 b 而得.

(I_+) $\vdash a = a$.

再将$\wedge$、$\vee$、$\Leftrightarrow$、$\exists$ 视为导出符号，这就形成通常使用的经典二值逻辑演算系统 F^{1*}，它仍然是中介逻辑演算系统 ML 的子系统. 下文就以该系统作为近代公理集合论系统 ZFC 的配套逻辑工具.

我们用这些逻辑工具先在 MS 中定义自然数系统.

定义 38(递归集) $\mathrm{Ind}(a) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathfrak{M}(a) \wedge \varnothing \in a \wedge \forall x(x \in a \Rightarrow x^+ \in a)$.

定理 71 $\exists a(\mathrm{Ind}(a) \wedge \forall x(x \in a \Leftrightarrow \forall y(\mathrm{Ind}(y) \Rightarrow x \in y)))$.

实际上，递归集就是至少含元素 $\varnothing$ 的后继集，而定理 71 所肯定存在的是最小的递归集，也就是我们在前文指出的 $\varnothing$ 的后继恰集 $\varnothing^{\#}$. 当然，这里的命题联结词做了更动，这是为了使本段的工作全部能嵌入 ZFC 中而做的技术处理，但在一定条件下（即当所考虑的集合均是清晰集时），这种表达与前文使用$\prec$等符号的表达是一致的.

定义 39(自然数集) $\omega(a) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathrm{Ind}(a) \wedge \forall x(x \in a \Leftrightarrow \forall y(\mathrm{Ind}(y) \Rightarrow x \in y))$.

将定理 71 中所肯定存在的集合 a 称为自然数集. 此集是唯一的，但我们没有使用这一性质，这里只约定“a 是自然数集”这个谓词的定义，这种记法比较方便. 自然数集的元素即自然数.

定义 40(自然数) $N(b) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \exists a(\omega(a) \wedge b \in a)$.

定理 72 $\forall x(N(x) \Rightarrow \mathrm{dis}(x))$.

定理 73 (1) $N(0)$.

(2) $\forall x(N(x) \Rightarrow N(x^+))$.

(3) $\forall x(N(x) \Rightarrow (x = 0 \vee \exists y(N(y) \wedge x = y^+)))$.

(4) $\forall x \forall y((N(x) \wedge N(y) \wedge x^+ = y^+) \Rightarrow x = y)$.

(5) $\forall x(N(x) \Rightarrow \neg(x^+ = 0))$.

证明 (1)、(2)、(5) 都是显然的，现证(3) 和(4).

证(3) 设 $N(x)$，即存在 a，使 $\omega(a) \wedge x \in a$，则由 $\mathfrak{M}(a)$，及定理 44(子集定理)，存在下列集合：

$$b = \{y \mid y \in a \wedge (y = 0 \vee \exists z(z \in a \wedge z^+ = y))\}.$$

因 $0 \in b$，且 $\forall y(y \in b \Rightarrow y^+ \in b)$，故 $\mathrm{Ind}(b)$，从而 $x \in b$. 即 $x = 0 \vee \exists y(y \in a \wedge y^+ = x)$，显然这里 y 满足 $N(y)$，故(3)得证.

证(4)　设 $N(x) \wedge N(y) \wedge x^+ = y^+$，则存在集合 a、b，使 $x \in a \wedge \omega(a)$ 及 $y \in b \wedge \omega(b)$. 因 $\mathrm{Ind}(a)$ 及 $\omega(b)$，有 $y \in a$. 再由 $\mathfrak{M}(a)$ 及定理 44，存在集合 $c = \{z \mid z \in a \wedge \bigcup z^+ = z\}$. 因 $\bigcup 0^+ = \bigcup(0 \cup \{0\}) = 0$，故 $0 \in c$. 设 $z \in c$，由本定理(2)，可知 $\bigcup(z^+)^+ = \bigcup(z^+ \cup \{z^+\}) = (\bigcup z^+) \cup (\bigcup \{z^+\}) = z \cup z^+ = z \cup (z \cup \{z\}) = z \cup \{z\} = z^+$，从而 $z^+ \in c$，故 $\mathrm{Ind}(c)$. 由此可得 $x \in c$ 且 $y \in c$，因此 $x = \bigcup x^+ = \bigcup y^+ = y$. 故(4)得证. □

容易看出，定理 73 中的(1)～(5)即为 Peano 自然数系统的 5 条公理. 以此 5 条性质为公理，并以前述之逻辑系统为推理工具，即可在 MS 中推出所有自然数性质. 特别地，可在下文中使用自然数上的归纳原理和递归原理等. 以下将用 m、n、k 等字母表示自然数.

定义 41(*n* 次联集)　$\bigcup^0 x =_{\mathrm{df}} x$; $\bigcup^{n+1} x =_{\mathrm{df}} \bigcup(\bigcup^n x)$.

定义 42(良集)　$w(x) \Leftrightarrow_{\mathrm{df}} \mathrm{dis}(x) \wedge \mathfrak{M}(x) \wedge \forall n \forall y(y \in \bigcup^n x \Rightarrow \mathrm{dis}(y) \wedge \mathfrak{M}(y))$.

我们所定义的良集，就是本身是小的清晰集，其元素也是小的清晰集，其元素的元素，以及再其后的元素的元素的元素，等等，直至任何一层的"子孙"，都仍是小清晰集. 良集有一个很好的性质，即其元素仍为良集：

定理 74　$w(a) \Leftrightarrow \forall x(x \in a \Rightarrow w(x)) \wedge \mathrm{dis}\, a \wedge \mathfrak{M}(a)$.

我们在 ZFC 中所遇见的所有集合都是良集，因此，我们就把这儿所定义的良集作为 ZFC 对象的代表. 为方便起见，下文中凡良集均用希腊字母 α、β、γ 等表示之. 即 $\forall \alpha(\cdots)$ 表示 $\forall x(w(x) \rightarrow \cdots)$，$\exists \beta(\cdots)$ 表示 $\exists y(w(y) \wedge \cdots)$ 等. 接下来，可以证明下述 8 个定理，它们是：

定理 75　$\forall \alpha \forall \beta(\forall \gamma(\gamma \in \alpha \Leftrightarrow \gamma \in \beta) \rightarrow \alpha = \beta)$.

这是 ZFC 中的外延性公理.

定理 76　$\forall \alpha \forall \beta \exists \gamma \forall \delta(\delta \in \gamma \Leftrightarrow (\delta = \alpha \vee \delta = \beta))$.

这是 ZFC 中的对偶公理.

定理 77　$\exists \alpha \forall \beta(\neg(\beta \in \alpha))$.

这是 ZFC 中的空集公理.

定理 78　$\forall \alpha \exists \beta \forall \gamma(\gamma \in \beta \Leftrightarrow \exists \delta(\delta \in \alpha \wedge \gamma \in \delta))$.

这是 ZFC 中的联集公理.

定理 79　$\forall \alpha \exists \beta \forall \gamma(\gamma \in \beta \Leftrightarrow \forall \delta(\delta \in \gamma \Rightarrow \delta \in \alpha))$.

这是 ZFC 中的幂集公理.

定理 80　设 $\varphi(x, y)$ 为只含谓词 $\in$ 及形式符号 $\neg$、$\Rightarrow$、$\wedge$、$\vee$、$\exists$、$\forall$、

一的合式公式，则

$$\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma(\psi(\alpha,\beta)\wedge\psi(\alpha,\gamma)\Rightarrow\beta=\gamma)$$
$$\rightarrow\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma(\gamma\in\beta\Leftrightarrow\exists\delta(\delta\in\alpha\wedge\psi(\delta,\gamma))).$$

这是 ZFC 中的替换公理，我们简要地证明如下：

证明 由 MS 的公理 XI（替换公理）知，对任何 α，存在集合 b 满足：

$$\mathfrak{M}(b)\wedge b\ \underset{y}{\mathrm{exa}}(\exists x(x\in\alpha^\circ\wedge\psi(x,y)\wedge w(y))),$$

注意我们取公理 XI 中的单值谓词为 $\psi(x,y)\wedge w(y)$，易知它仍是单值谓词. 从而有：

$$\mathfrak{M}(b)\wedge\forall y(y\in b^\circ\Leftrightarrow\exists x(x\in\alpha\wedge\psi(x,y)\wedge w(y))). \qquad (*)$$

注意我们使用的是 $\Leftrightarrow$ 符号，所以 $y\in b\asymp\exists x(\cdots)$ 完全可推出 $y\in b^\circ\Leftrightarrow\exists x(\cdots)$，并且 α 是清晰的，$\alpha^\circ=\alpha$，所以上式中的 b 加圈以及 α 不加圈都是合法的. 特别地，我们有 $\forall y(y\in b^\circ\rightarrow w(y))$，故 $w(b^\circ)$. 可记这个 b° 为 β.

对任意 $\gamma\in\beta$，由上式（$*$）知，存在 δ 使 $\delta\in\alpha$ 且 $\psi(\delta,\gamma)$. 反之，对任何 γ，若存在 δ 使 $\delta\in\alpha$ 且 $\psi(\delta,\gamma)$，则 $\exists x(x\in\alpha\wedge\psi(x,\gamma)\wedge w(\gamma))$，于是依（$*$），$\gamma\in\beta$. 综上知，

$$\forall\alpha\exists\beta\forall\gamma(\gamma\in\beta\Leftrightarrow\exists\delta(\delta\in\alpha\wedge\psi(\delta,\gamma))). \qquad \square$$

定理 81 $\exists\alpha(0\in\alpha\wedge\forall\beta(\beta\in\alpha\Rightarrow\beta'\in\alpha))$.

这是 ZFC 中的无穷公理.

定理 82 $\forall\alpha(\forall\beta\forall\gamma(\beta\in\alpha\wedge\gamma\in\alpha\wedge\neg(\beta=\gamma)\rightarrow\neg\exists\delta(\delta\in\beta\wedge\delta\in\gamma))\Rightarrow\exists\delta\forall\eta(\eta\in\alpha\wedge\neg(\eta=0)\Rightarrow\exists!\gamma(\gamma\in\delta\wedge\gamma\in\eta)))$.

这是 ZFC 中的选择公理.

既已证明了对于良序集而言，ZFC 中的外延、对偶、空集、联集、幂集、替换、无穷、选择等 8 条公理都为真，又知道分出公理可由替换公理证出，那么就把 ZFC 中除正则公理之外的所有公理都在 MS 中作为定理证明出来了. 我们把 ZFC 中除正则公理以外的所有公理所构成的公理系统记为 ZFC，因而 ZFC 是 MS 的子系统. ZFC 之配套的推理工具已在本段开头陈述过了. 总之，至此已达到了本段开头所说的目的.

5.4.6 逻辑数学悖论在 MS 中的解释方法

我们在 5.4.5 节中指出，ZFC 中的所有公理均可在 MS 中对个体和谓词加以限制后得以证明. 我们又曾指出：对于展开精确性经典数学而言，ZFC 系统已足，因为正则公理在 ZFC 系统中只是为了避免悖论才设

置的，该公理对于推出整个经典数学不起作用. 读者也许会认为 MS 中没有正则公理，则可能要出问题，例如 MS 能够避免悖论的发生吗？或者最起码的，ZFC 能得以避免的悖论，在 MS 中还能有效地避免吗？本段的讨论将表明，历史上种种逻辑数学悖论，包括过去在 ZFC 中无需解释的著名的关于多值逻辑的莫绍揆悖论以及无穷值悖论（详见 3.3 节），都可以在 MS 中得到合理的解释.

定理 83 $a \underset{x}{\text{com}} \not\sim^{\circ} P(x) \land b \underset{x}{\text{com}} \overset{0}{\sim} P(x) \Rightarrow (a \cup (b\downarrow)) \underset{x}{\text{exa}} P(x)$.

定理 84 $\forall S(\neg(S \underset{x}{\text{exa}} x \,\tilde{\in}\, x)))$.

这两条定理表明，若任何谓词（不管是不是正规谓词）都允许造概集，则我们可对任何谓词造恰集，但如果对任何谓词（哪怕是正规谓词，例如定理 84 中的 $x \,\tilde{\in}\, x$）可造恰集，即会引起矛盾. 所幸的是，在我们的中介公理集合论系统中，只允许正规谓词才可造集，而且只允许造概集，这就使得直接用概括原则引起悖论的道路被切断了. 但是，允许正规谓词可以造概集是否会引起矛盾呢？下面的定理表明，虽在二值逻辑中可能会引起的矛盾，在多值逻辑中却能得以避免.

定理 85 $a \underset{x}{\text{com}}(x \,\tilde{\in}\, x) \Rightarrow \neg(a \,\tilde{\in}\, a)$.

定理 86 $a \underset{x}{\text{com}}(x \notin x) \Rightarrow \neg(a \,\tilde{\in}\, a)$.

证明 依概集的定义，所有 x，$x \notin x \Rightarrow x \in a$. $\exists(x \notin x) \Rightarrow \exists(x \in a)$，即 $x \in x \rightarrow x \notin a$. 以 $x = a$ 代入，有 $a \notin a \Rightarrow a \in a$，$a \in a \Rightarrow a \notin a$，亦即有 $a \notin a \Leftrightarrow a \in a$. 这在经典逻辑中是一个悖论，也就是著名的 Russell 悖论. 但在中介逻辑中，这不是说 $a \notin a$ 与 $a \in a$ 等值，而只是当 $a \notin a$ 真即 $a \in a$ 假时，$a \in a$ 也真；反之，$a \in a$ 真时，$a \notin a$ 也真. 只是我们令 $a \,\tilde{\in}\, a$，这一切都仍是可成立的.

类似地，也可以在 MS 中找到对沈有鼎悖论（详见 2.4 节）的解释.

定义 43（n 循环集） $\text{cyc}_1(x) \Leftrightarrow_{\text{df}} x \in x$，

$\text{cyc}_n(x) \Leftrightarrow_{\text{df}} \exists x_1 \cdots \exists x_{n-1}(x \in x_1 \land x_1 \in x_2 \land \cdots \land x_{n-1} \in x)$.　　$(n \geqslant 2)$

定理 87 $a \underset{x}{\text{com}} \exists \text{cyc}_n(x) \Rightarrow \sim \text{cyc}_n(a)$.

此定理之证明与定理 86 的证明相似，即若设 $\text{cyc}_n(a)$，则会引起矛盾，若设 $\exists \text{cyc}_n(a)$，也会引起矛盾. 所以只有 $\text{cyc}_n(a)$ 取中值才可，即有 $\sim \text{cyc}_n(a)$. □

如此看来，在中介逻辑中，避免产生矛盾的办法是将一些命题的真值推向既不真又不假的中间值；那么，对于多值逻辑悖论，又将向何处推

移呢？

我们先在 ML 中定义一个新的蕴词 $\rightharpoonup$：

$$p\rightharpoonup q\Leftrightarrow_{df}(p\rightarrow q)\vee\sim p.$$

又定义　$(p\rightharpoonup)^1 q\Leftrightarrow_{df}p\rightharpoonup q,(p\rightharpoonup)^{n+1}q\Leftrightarrow_{df}p\rightharpoonup(p\rightharpoonup)^n q.\ n=1,2,\cdots$

易证　(1) $p\rightharpoonup q,p\vdash q$,(2) 若 $\Gamma,p\vdash q$,则 $\Gamma\vdash p\rightharpoonup q$,(3) $(p\rightharpoonup)^{n+1}q\dashv\vdash(p\rightharpoonup)^n q$. 这说明 $\rightharpoonup$ 满足文献[40]和文献[45]中关于蕴涵词的要求.

定理 88　对任何自然数 n,总有

$$\neg p\vdash\forall a\neg(a\ \underset{x}{\mathrm{exa}}(x\in x\rightharpoonup)^n p).$$

定理 89　$a\ \underset{x}{\mathrm{com}}(x\in x\rightharpoonup)^n p\Rightarrow a\in a.$

定理 88 表明,当 p 是命题变元时,谓词 $(x\in x\rightharpoonup)^n p$ 的恰集不存在(因为此时可取 p 为不真,依定理 88,就有

$$\forall a\neg(a\ \underset{x}{\mathrm{exa}}(x\in x\rightharpoonup)^n p)).$$

在文献[40]和文献[45]中,莫绍揆悖论和无穷逻辑悖论都是利用概括原则将谓词 $(x\in x\rightharpoonup)^n p$ 造集而产生出来的. 我们在中介公理集合论中并不允许任何谓词均可造恰集,这当然使上述两种悖论无法产生. 此外,定理 89 还表明,谓词 $(x\in x\rightharpoonup)^n p$ 可以造成概集,并且这个概集 a 将具有 $a\in a$ 的"怪异"特征.

最后我们来讨论 Cantor 的最大基数悖论. 由于还没有定义"基数"这个概念,我们可以用"等价"的概念引出"基小于或等于"、"基等于"、"基小于"这些概念,它们实际上就代替集合取基数之后的比较大小.

定义 44(等价)　$a\overset{f}{\simeq}b\Leftrightarrow_{df}f^\circ\subseteq a^\circ\times b^\circ\wedge\forall x(x\in a^\circ\Rightarrow\exists y(y\in b^\circ\wedge\langle x,y\rangle\in f^\circ))\wedge\forall y(y\in b^\circ\Rightarrow\exists x(x\in a^\circ\wedge\langle x,y\rangle\in f^\circ))\wedge\underset{\langle x,y\rangle}{\mathscr{U}n}(\langle x,y\rangle\in f^\circ)\wedge\underset{\langle y,x\rangle}{\mathscr{U}n}(\langle y,x\rangle\in f^\circ).$

$$a\simeq b\Leftrightarrow_{df}\mathfrak{M}(a)\wedge\mathfrak{M}(b)\wedge\exists f(a\overset{f}{\simeq}b).$$

定义 45(等价)　(基小于或等于、基大于或等于、基小于等)

$$a\overset{Ca}{\leqslant}b\Leftrightarrow_{df}(a^\circ\subseteq b^\circ)\vee\exists c(c^\circ\subseteq b^\circ\wedge a\simeq c),$$

$$a\overset{Ca}{\geqslant}b\Leftrightarrow_{df}b\overset{Ca}{\leqslant}a,\quad a\overset{Ca}{=}b\Leftrightarrow_{df}(a\overset{Ca}{\leqslant}b)\wedge(b\overset{Ca}{\leqslant}a),$$

$$a\overset{Ca}{<}b\Leftrightarrow_{df}a\overset{Ca}{\leqslant}b\wedge\neg(b\overset{Ca}{\leqslant}a),\quad b\overset{Ca}{>}a\Leftrightarrow_{df}a\overset{Ca}{<}b.$$

定理 90　$\mathfrak{M}(a)\Rightarrow a\overset{Ca}{\leqslant}\mathscr{P}d(a).$

定理 91　$\mathfrak{M}(a)\Rightarrow\neg(\mathscr{P}d(a)\overset{Ca}{\leqslant}a).$

由以上两定理,立即得:

定理 92　$\mathfrak{M}(a)\Rightarrow a\overset{Ca}{<}\mathscr{P}d(a).$

也就是说，任何小集"基小于"它的清晰幂集. 但同时，我们还有如下的定理.

定理 93 $\forall x(V \overset{\mathrm{Ca}}{\geqslant} x)$.

定理 94 $V \overset{\mathrm{Ca}}{\geqslant} \mathscr{P}d(V)$.

定理 95 $\forall x(\mathfrak{M}(x) \to x \in M) \Rightarrow \urcorner \mathfrak{M}(M)$.

虽然有的集基大于或等于它的幂集，但它不会是小集，而是诸如 V 之类的巨集. 而如果把所有的小集组成一个集，此集不会再是小集（定理95），由此可想见，把所有"基数"放在一起聚合成一个集，也不会是小集，对于这个集，它与其幂集之间的关系不会再是"基小于"关系. 当然，有关 Cantor 最大基数悖论的完全解释有待于 MS 中基数概念的精确建立. 这儿仅是类比地说明一下.

5.5 从计算机科学与数学研究的角度看中介系统的发展

5.5.1 中介系统目前的发展概况

关于中介系统第一篇论文（文献[103]）发表于 1984 年 7 月. 如果依此计算的话，则可认为中介系统的研究、建立和发展，已经 25 年了. 中介系统是在中介原则观点下建立起来的、并以中介逻辑演算为逻辑工具的一种新的数学理论系统.

狭义的中介系统仅指中介逻辑演算系统 ML，它由中介命题逻辑演算系统 MP 及其扩张系统 MP*，中介谓词逻辑演算系统 MF 及其扩张系统 MF*，以及带等词的中介谓词演算系统 ME* 等 5 个演算系统构成. 有关 ML（MP、MP*、MF、MF*、ME*）的严格的语义研究，已由潘振华教授等多位逻辑工作者进行并完成，即其可靠性、相容性和完备性均已被严格证明.

ML 作为一种有其自身特色的三值逻辑演算系统而言，既是广义中介系统的基础部分，也是构造中介公理集合论系统并使之严格形式化的配套工具.

广义的中介系统，则除了包含其基础部分 ML 之外，还应包括下列

已经建立并发展起来的研究内容和方向：

(1) 中介代数系统(吴望名、潘吟、张东摩).

(2) 中介模态逻辑系统(邹晶、张东摩).

(3) 中介公理集合论系统(朱梧槚、肖奚安).

(4) 中介证明论系统(钱磊).

(5) 中介模型论系统(朱朝晖、钱磊).

(6) 中介模型力迫论系统(朱朝晖).

(7) 中介不完全信息推理系统(邓国彩).

(8) 中介程序设计语言 MILL 及其解释系统(宋云波、徐宝文).

(9) 中介自动推理的理论与实现系统(张东摩).

(10) 中介直觉主义系统(钱磊).

(11) 中介逻辑的非标准化扩张系统(宫宁生、张东摩).

限于本节的性质与篇幅，此处不能对上述种种研究内容与方向作进一步的详细介绍，只能请有兴趣的读者去查阅相关的文献.

20 世纪 90 年代中期以来，又有不少逻辑工作者在中介逻辑方面做了有意义的工作，详见参考文献[160]～[180]，而其中有如下两项工作值得专门指出如下：

(1) 由潘正华教授所完成的中介逻辑之无穷值模型的建立及其在知识表示与知识推理方面的应用. 关于中介逻辑之无穷值模型的建立有重要意义，因为这样一来，上文所指 ML 作为一种有其自身特色的三值逻辑演算，实际上只是中介逻辑的一个三值模型而已.[170]～[172]

(2) 由洪龙教授所完成的中介真值程度词的数值化工作，并由此而开辟了中介逻辑在工程科学方面的应用前景.[179],[180] 并且在数字图像处理、计算机网络等方面取得了令人满意的应用效果，其中用于图像滤波的效果明显优于模糊数学方法和其他方法. ①

---

① 相关论文已被国际会议和杂志录用，2008 年内均可发表，具体作者和文章如下：

[1] 周宁宁，赵正旭. 图像的中介滤波器算法与图像中介保真度度量. 电子学报.

[2] Ning-ning Zhou, Zheng-xu Zhao, Long Hong and Yu long Deng. “A New Image Edge Detection Algorithm Based on Measuring of Medium Truth Scale”, 5th IEEE International Conference on networking, Sensing and Control, to be published.

[3] 成卫青、龚俭、丁伟，基于流特性和真值程度的 VOIP 语言语言质量单端客观评价，通信学报.

5.5.2 中介系统的哲学背景

如所知，自从 Aristotle 以来，形式逻辑就区分了反对对立和矛盾对立. 如果两个概念都有其自身的肯定内容，并在同一内涵的一个更为高级的概念中，二者之间存在着最大的差异，那么这两个概念就是反对对立概念. 例如，善和恶，美和丑，男人和女人等等. 又当两个概念中，其中一个的内涵否定另一个的内涵，那么这两个概念就是矛盾对立概念. 例如，劳动和非劳动，资本和非资本，男人和非男人等等. 其实反对对立概念在日常生活、社会科学和自然科学中都是经常使用和无处不有的，数学领域亦当不会例外.

设 P 为一谓词(概念或性质)，若对任一对象 x 而言，总是要么 x 完全满足 P，要么 x 完全不满足 P，亦即不存在这样的对象，它部分地满足 P，部分地不满足 P，则我们就说 P 是清晰谓词，并简记为 $\text{dis}P$. 又若对谓词 P，有某个对象 x，它部分地具有性质 P，部分地不具有性质 P，则称 P 是模糊谓词，并简记为 $\text{fuz}P$. 我们把形式符号～叫做模糊否定词，解释并读为“部分地”，于是$\sim P(x)$表示对象 x 部分地具有性质 P，而$P(x)$表示对象 x 完全具有性质 P. 我们把形式符号╕叫做对立否定词，解释并读为“对立于”. 并把谓词 P 的反对对立面记为╕P. 如此，我们就用 P 和╕P 抽象地表示一对反对对立概念. 而以 P 和$\neg P$ 抽象地表示一对矛盾对立概念. 如所知，在经典二值逻辑中，形式符号$\neg$的名称是否定词，解释并读为“非”.

现任给 P 和╕P，如果对象 x 满足$\sim P(x)\,\&\sim$╕$P(x)$，即 x 部分地具有性质 P，又同时部分地具有性质╕P，我们就说 x 为 P 和╕P 的中介对象，这也就是哲学上常说的“亦此亦彼”. 所谓“此”与“彼”，指的就是 P 与╕P. 而“亦此亦彼”就是对立面在其转化过程中的中介状态，即同一性在质变过程中的集中表现. 它呈现为既是对立面的“此”方，又是对立面的“彼”方. 例如，黎明就是黑夜转化到白昼的中介，而黄昏则为白昼转化为黑夜的中介. 这种对立面的中介概念或对象，从日常生活到各个自然科学或社会科学领域中，也是经常运用和处处皆是的，诸如中年就是老年与少年的中介，0 是亦正亦负的中性数，半导体就是导体与绝缘体的中介，如此等等. 如所知，认识论中也有所谓对立面总有中介对象存在的基本原则，其中所说的对立面，实际上就是指的反对对立概念 P 和╕P.

综上所论,就是构造中介系统的哲学背景.

5.5.3 中介系统的思想原则

如所知,在经典的二值逻辑和精确性经典数学中,除了拒不考虑和研究普遍存在且为人们所经常使用的模糊性质或模糊概念外.特别是在论域的适当限制下,首先否认中介对象的存在,进而使在所给论域中,反对对立与矛盾对立被视为同一,以致$\neg P$就是$ㅋP$,即如非美即丑,非善即恶,非真即假等等.

这就是说,在经典二值逻辑演算中,无形中贯彻了如下一条原则:在论域的适当限制下,任给谓词P和对象x,要么有$P(x)$,要么有$ㅋP(x)$.也就是无条件认为,对任何谓词P,都没有x能使有$\sim P(x)$,不妨将这一原则叫做"无中介原则".但应注意,经典数学并不把该无中介原则作为一条公理明确列出,只是在系统的建立和展开中无形地把这一原则的精神贯彻始终.

然而,我们主张建造一套承认中介对象存在的逻辑演算系统ML和公理集合论系统MS,即所谓中介数学系统MM.在MM中,要贯彻一条相反于"无中介原则"的原则.那就是无条件承认,并非对于任何谓词P和对象x,总是要么$P(x)$真,要么$ㅋP(x)$真.亦即存在这样的谓词P,有对象x使得$P(x)$和$ㅋP(x)$都部分地真.我们把这条原则叫做"中介原则".同样地,我们在中介系统或中介数学系统中,也不把中介原则作为一条公理明确立出,而是在系统的建立和展开中,无形地将中介原则的精神贯彻始终.但应注意,中介原则并不主张任何反对对立面都有中介,而只是认为并非任何反对对立面都没有中介.

5.5.4 数学研究对象的再扩充

数学是从量的侧面去研究客观世界的一门科学.它以客观世界中的量性对象为自己的研究对象,但在一定的历史阶段中,囿于历史的局限,总有这样或那样的未被数学地考察和研究过的量性对象.例如,在很长的历史阶段中,数学只能处理静态的、有限性的和潜无限性的量性对象,这就是常量数学的发展和研究.直到18世纪以后,数学才能处理动态的量性对象,这就是从微积分学创立以后的变量数学的发展和研究.而19世纪古典集合论的创立,标志着数学进入处理实无限量性对象的时代.

这就是 Hausdorff 所说的:"从有限推进到无限,乃是 Cantor 的不朽功绩."再如确定性的经典数学只处理确定性的量性对象,对于随机性的量性对象不作分析研究,而后由于概率论的诞生和发展,标志着数学研究对象由确定性到随机性的再扩充.

20 世纪 60 年代,由 Zadeh 创始而被发展起来的模糊集理论,标志着数学研究对象由精确性量性对象到模糊性量性对象的再扩充.问题在于这一扩充并没有在纯数学的基础理论意义下彻底实现. Zadeh 的历史功绩,在于他是第一个十分明确地指出,必须数学地分析处理模糊现象,同时又提供了一种相对合理可行的处理方法.这就是当前发展起来的、用精确性经典数学手段去处理模糊现象的方法.如所知,Zadeh 是一位著名的控制论专家,大量的涉及模糊现象的实际问题,刺激他考虑如何数学地分析处理这些模糊现象,加上他的才智和思想活跃,使他创建了当今的模糊集理论.但因 Zadeh 不是纯粹数学家,专业的限制,决定了 Zadeh 不能在数学基础理论意义下去解决数学研究对象的再扩充问题,同时也决定了 Zadeh 只能提供当前这种相对合理的、处理模糊现象的方法.

中介系统是在中介原则之下建立起来的一套以 ML 为逻辑工具的数学理论系统.不仅在 ML 中直接引进了模糊否定词～和对立否定词ㅋ,而且在中介公理集合论 MS 中给出了有如模糊谓词 $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{fuz}} P$,清晰谓词 $\underset{x_1,\cdots,x_n}{\text{dis}} P$,概集 $a\ \underset{r}{\text{com}}P$,恰集 $a\ \underset{r}{\text{exa}}P$ 等概念的形式定义.这表明中介系统已在数学基础理论意义下解决了模糊谓词的造集问题.因而也在数学基础理论意义下完成了数学研究对象由清晰量性对象到模糊量性对象的再扩充.

素朴地说,可将上述概集、恰集等描述如下:

定义 1 给定谓词 P,如果集合 A 满足条件:

(1) $P(x) \vdash x \in A$,

(2) ㅋ$P(x) \vdash x \notin A$.

则称 A 为对应于 P 的概集,记为 $A\ \underset{r}{\text{com}}P$.

定义 2 给定谓词 P,如果集合 A 满足条件:

(1) $P(x) \vDash x \in A$,

(2) $\sim P(x) \vDash x \,\widetilde{\in}\, A$,

(3) ㅋ$P(x) \vDash x \notin A$,

则称 A 为对应于 P 的恰集,记为 $A\ \underset{r}{\text{exa}}P$.

此处 $x \widetilde{\in} A$ 读为 x 部分地属于 A. 当然，在精确性经典数学中，任给一对象 x 和一集合 A，要么 $x \in A$，要么 $x \notin A$. 但在中介系统中，由于对立否定词ㄱ和模糊否定词～的引进，对象与集合的关系也相应地扩张了. 特别是给定一个集合 A，如果没有 x 能使有 $x \widetilde{\in} A$，则称 A 为清晰集，记为 disA. 若对集合 A，有对象 x 使有 $x \widetilde{\in} A$，则称 A 为模糊集，记为 fuzA.

显然，对于任何 A $\mathrm{e}\underset{x}{\mathrm{x}}\mathrm{a}P$ 而言，A 是唯一确定的. 但对于 A $\mathrm{c}\underset{x}{\mathrm{o}}\mathrm{m}P$ 而言，A 就未必是唯一确定的. 并且谓词 P 的恰集一定是该谓词的概集，反之，则未必. 然而当谓词 P 为一 dis$P$ 时，则 P 的恰集与概集相同，并且唯一确定. 今设 P 为一 fuz$P$，则如图 5.2 所示：A，B，C 都是 P 的概

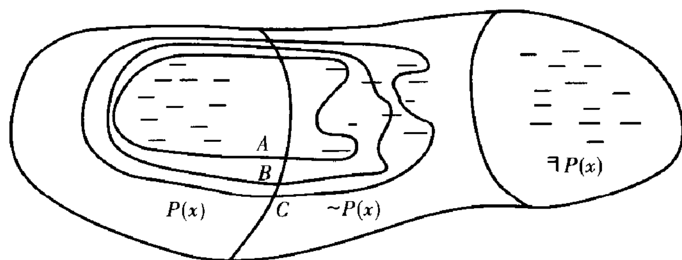


图 5.2

集，而且其中之 A 和 C 均为清又如图 5.3 所示，晰集，但 B 却为模糊集，因从图 5.2 上看，有三个对象是部分地属于 B 的. 集合 D 就是 P 的唯一

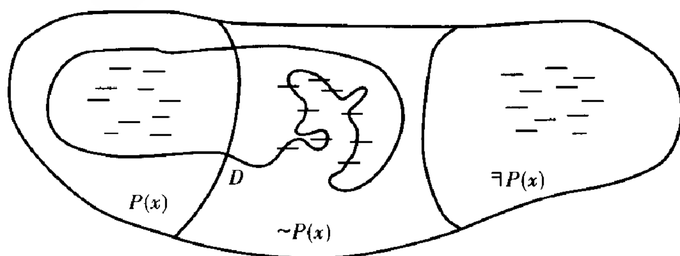


图 5.3

确定的恰集，当然 D 也是 P 的一个概集. 当然，这里要注意，对于任一使有 $x \widetilde{\in} D$ 的 x 而言，我们不从定量的角度再去区分 x 部分地属于 D 的程度是多是少. 再如图 5.4 所示，当 P 为清晰谓词时，集合 E 乃是 P 的唯一的恰集，同时也是 P 的唯一的概集，即 P 的概集与恰集相等，并且是唯一确定的.

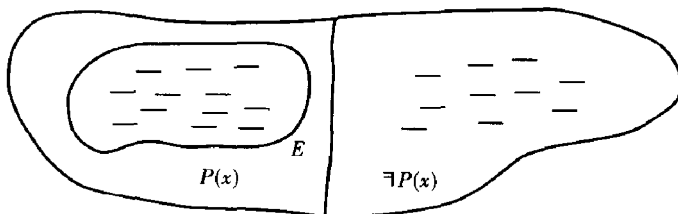


图 5.4

5.5.5 概括原则的修改问题

自从古典集合论出现悖论以后，人们一度发现从概括原则出发，能导致互相矛盾的结论，以致普遍怀疑概括原则本身就是导致悖论的根本原因.因而立足于修改概括原则去排除悖论的意见被普遍接受，从而成为历史上排除悖论的主要方案.而且事实上迄至目前为止，几种获致一定成效的方案都涉及概括原则的修改.但所有这些方案都有一个共同的特点，这就是在排除悖论的同时过多地限制了概括原则的合理内容.因而存在这样一个遗留问题，那就是如何去寻找一种方案，它既能排除悖论，又能最大限度地保留概括原则的合理内容.这一遗留问题的求解，在经典数学范围内不仅没有解决，而且看上去难以在经典数学范围内获得解决.

但在中介系统中，通过泛概括公理的引进，并在中介公理集合论中一系列相关定理的证明，最终解决了这个问题，即有如下结论成立：

(*)在中介公理集合论 MS 中，既能有效地排除历史上已出现的各种悖论，又能保留概括原则的全部内容.

本结论(*)表明，对于上述有关如何修改概括原则的遗留问题，已在中介系统中彻底解决.

5.5.6 经典数学系统和中介数学系统之间的关系

如所知，ZFC 之所以被公认为整个经典数学的理论基础，其中有一条重要的理由，就是由 ZFC 能推出整个经典数学.而 ZFC 通常包括外延、空集、对偶、并集、幂集、子集、无穷、选择、替换和正则等 10 条非逻辑公理.其中的正则公理又叫做基础公理，它对于由 ZFC 推出整个经典数学是不起作用的，ZFC 设置该公理之目的在于保证$\in$关系的良基性和 ZFC 之集都

是基本的. 所以 ZFC 中用以推出整个经典数学的是正则公理以外的其余九条公理. 但这九条公理也不是每一条都是必要的，即并非都是独立的，有如子集公理的设置，实际上是为了使用起来方便且自然，如果不怕麻烦，那么有了替换公理与其他公理配套，便足以覆盖子集公理的作用了. 不论如何，ZFC 中除正则公理以外的每一条非逻辑公理均可在某种约束条件下严格地被证明为 MS 中的定理，对此，读者可参阅 5.4.5 的相关内容. 还应指出，所说的某种约束条件是必要的. 如果简单地理解为 ZFC 中除正则公理以外的各条公理在 MS 中无条件地成立，则将导致悖论的出现，因在 MS 中没有考虑 ZFC 的正则公理. 但在所说的约束条件下来看 MS 中的这些（ZFC 之公理）定理，则就无须担心悖论的出现，因为 MS 中据以排除悖论的道理与正则公理的思想内容无关. 我们把 ZFC 中除正则公理以外之其余的公理所构成的公理系统记为 ZFC .

此外，我们又在文献[104]中严格证明了经典二值逻辑演算系统是中介逻辑演算系统的子系统. 这也堪称为中介逻辑演算系统 ML 的一种特色，历史上，不少三值逻辑系统反过来都是经典二值逻辑演算的子系统，而 ML 却真正扩充了经典二值逻辑系统.

综上所说，我们可以获致如下的结论：即中介系统拓宽了经典数学的逻辑基础和集合论基础. 因为由中介公理集合论系统 MS 配以中介逻辑演算系统 ML 为推理工具，一方面可以推出 ZFC^- 及其配套的逻辑工具，即经典二值逻辑演算系统 CL，并由 ZFC 配以 CL 后，即可推出整个经典数学，另一方面，在近代公理集合论 ZFC 中只允许精确谓词可以造集，但在中介公理集合论 MS 中，精确谓词可以造集，模糊谓词也能造集. 如上结论可由图 5.5 表示如下：

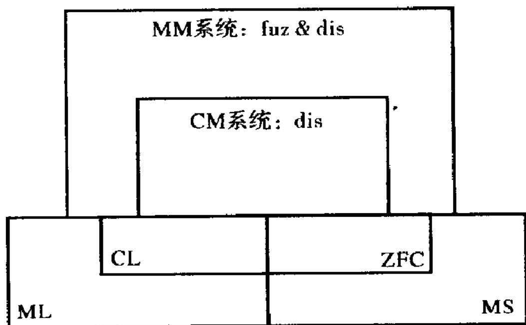


图 5.5

其中 dis 表示清晰，fuz 表示模糊，CL 表示经典的二值逻辑演算系统，CM 表示经典数学，MM 表示中介数学或未来的不确定性数学.

5.5.7 中介系统在计算机科学中的应用前景

在认识论中有一条重要原则,那就是对立面的相互转化过程中总有中介过渡现象,即所谓中介状态或中介对象.它是同一性在质变过程中的集中表现.既然对立面的相互转化普遍存在,则中介状态也必然普遍存在.那么从量的侧面去研究中介对象或同一性在质变过程中的集中表现就是不可避免的了.中介系统正是在这样的实际背景上构造的,它当然与客观实际有着紧密的联系,也就会在实践中得到应用.

当前,人脑思维的秘密尚未揭开,但普遍认为人脑思维不是离散数字式的,也不完全是简单的是与非的二值逻辑演算,思维在本质上存在着过渡和中介.推理过程也不是一维的和点线式的,而应该是多维的和网状式的.因而以人的智能为基础的计算机科学,就应建立在承认中介状态的、能反映出智能特征的逻辑体系的基础上.因而可以设想,中介系统将会在计算机科学的研究中,获得应用并进一步充实和发展其自身.另外,从技术的角度来说,凡是涉及思维、推理、判断和决策的地方,也几乎都要涉及过渡现象,即中介对象,所以中介系统也会在这些技术的发展中发挥作用.正如5.5.1中所已指出的那样,洪龙教授的近期工作[179,180]正好说明了这一点.

人工智能是当前十分活跃的高技术领域之一,它的应用领域十分广泛.当前的四大应用领域是:自然语言理解、专家系统、规划与问题求解、机器视觉.其中自然语言的多义性,早在计算机的处理过程中造成诸多不便.对此的早期研究只注重语法分析,后来发现这样做是片面的,开始运用语义规则,这就要求计算机具有更多的知识,但是直到20世纪60年代末期,仍然是语法第一.直到20世纪70年代,出现了T. Winograd的自然语言理解程序,才改变了这个局面.R. Schank认为听话和说话都是语义第一,而语义的基本成分是概念,因而他在1973年提出了“概念依赖理论”,创立了“概念图解法”.并在计算机上实现了用英语解释英语,用德语解释英语,并作出推理性答话等等.现在这一理论已十分流行,并已能用来理解童话故事.然而大量的概念都带有模糊性和亦此亦彼的中介性,因而只有充分考虑这种客观存在的模糊性和中介性,才能使自然语言的理解更加真实可信.又专家系统是近年来普遍感兴趣的领域,而目前的专家系统所存在的主要问题还是经验色彩太浓,推理过于简单,使用的逻辑工具大多是一阶逻辑.模糊集论的创始人Zadeh曾指出:“我的立场是——这也正是我不同于人工智能的研究者们的地

方，——人工智能中需要逻辑，但我们所要的不是一阶逻辑，而是模糊逻辑，即作为不精确或近似推理之基础的逻辑."实际上，Zadeh 在这里所说的这种逻辑，应该是那种以中介原则为背景，能以反映不精确推理并成为其基础的一种逻辑体系.

知识表示现有十余种方法，尽管这些方法都在特定的场合获得了一定的成果.但由于排斥了客观存在的模糊现象和中介状态，因而迄今为止未能使人工智能真正地在知识工程中获得完善的实际应用.既然中介系统直接以亦此亦彼的中介过渡和模糊量性对象为直观背景.因而可设想，若能将中介系统应用到上述理论和技术中，则无论是人工智能还是知识工程的研究领域，有可能出现新局面，取得新进展.同样亦如 5.5.1 中曾已提及的那样，潘振华教授的近期工作[170]~[172]已经显示了这一点.又例如，中介自动推理的理论与实现，中介定理证明器的研制成功，以及中介逻辑程序设计语言 MILL 的建立，也说明了中介系统在计算机科学研究中的应用前景.

第三篇

无穷观问题探索

第 6 章 数学无穷与数学基础

6.1 两种无穷观的区别和联系

历史上，亚里士多德(Aristotle)是第一个明确承认潜无限而反对实无限的学者，而略早于亚里士多德的柏拉图(Plato)则是第一个明确承认实无限而反对潜无限的学者.自古至今二千余年来，坚持潜无限观念的学者们和坚持实无限观念的学者们，一直是在互相否定的模式中争论不休，并且广泛涉及哲学、逻辑、计算机科学理论和数学等众多领域，卷入这场争论的大学者们，留给我们一大堆有关两种无穷的素朴描述，不妨陈述一、二如下：

(1) 亚里士多德明确认为，无限只能是一种潜在的存在，而不能是一种实在的存在.他说："因为分割过程永远不会告终(going)；这个事实保证了这种活动存在的潜在性，但并不能保证无限独立地存在."[181]

(2) 亚里士多德说："空间和时间是可以无限地划分的(going)，但并没有被无限地划分开来(gone)."[182]

(3) 贝尔(Bayle)说："如果我们在一英寸大小的材料上划下了无穷多条线条(gone)，我们不会作出这样一种划分，这种划分会把亚里士多德以为仅是可能的无限性(going)变成现实的无限性(gone)."[182]

(4) 列宁(Ленин)针对贝尔所言："如果我们在一英寸大小的材料上划下了无穷多条线条(gone)"一语指出："这就是说，如果我们把无限的划分进行到底(gone)！"[182]

(5) 外尔(Weyl)指出："布劳威尔(Brouwer)使这一点明确了，自然数列，它能够通过不断地达到下一个数而超越任何一个已经达到的界线.从而也就开辟了通向无限的可能性(going)，但它永远滞留于创造(生成)的状态之中(going)，而绝不是一个存在于自身之中的事物的封闭领域(gone)."[60]

通过这些素朴的描述，可将潜无限和实无限的差别规范为如下两点：

其一从生成的角度看，潜无穷永远是现在进行式(going)，而实无穷却是完成式(gone).

其二从存在的角度看，潜无穷是动态的和潜在的，而实无穷是静态的和实在的.

从而潜无限的两条基本性质是：

(1) 非有限：从而给出了通向实无限的可能性(going)；

(2) 必须永远是现在进行式：从而否定了达到进程终极处的可能性(非 gone，即 going).

又实无限的两条基本性质是：

(1) 非有限：从而给出了通向实无限的可能性(going)；

(2) 必定是完成式：从而肯定了达到进程终极处(gone).

例如，我们常用$[a,b]$表示坐标轴上的一个闭区间，在$[a,b]$内有无穷多个点，现令变量x在该区间内沿着X轴朝向b点移动，则变量x在区间内不仅可以无限趋近于其极限点b(going)，并在区间内最终可达到极限点b(gone). 从而我们可称变量x在$[a,b]$内以实无限方式趋向其极限点b. 我们又常用(a,b)来表示坐标轴上的一个开区间，在(a,b)内有无穷多个点，但端点a和b不在(a,b)内，此时同样令变量x在该区间内沿X轴朝向b点移动，尽管b点仍是变量x的极限点，但却不在(a,b)内，所以变量x在该区间内虽然仍可无限趋近于b点(going)，但在区间(a,b)内却永远达不到b点(going)，从而我们可称变量x在(a,b)内以潜无限方式趋向其极限点b.

又例如，在数学领域中，通常用符号O_∞来表示不在实平面上的一个无穷远点，而变量x无限趋近该无穷远点O_∞，则上述潜无限的两条基本性质在此体现为：

(1′) 非有限：从而给出了变量x趋向无穷远点O_∞的可能性(going)；

(2′) 必须永远是现在进行式：从而否定变量x达到无穷远点O_∞(非 gone，going).

又上述实无限的两条基本性质在此体现为：

(1′) 非有限：从而给出了变量x趋向无穷远点O_∞的可能性(going)；

(2′) 必定是完成式：从而肯定变量x必须达到无穷远点O_∞(非

going, gone).

总之，实无限是由现在进行式(going) 转化为完成式(gone)，而潜无限是由现在进行式(going) 强化为永远是现在进行式(going)，而无论是潜无限还是实无限，同样都是非有限进程. 因此，我们有：

非有限进程 $\begin{cases} \text{实无限：肯定达到进程终极处 (gone)；} \\ \text{潜无限：否定达到进程终极处 (going).} \end{cases}$

现在我们再从另一个切入点去进一步讨论和理解潜无限和实无限，面对我们的研究对象和事物，如果采纳每个每个或逐个逐个的手续进行处理或做出判断，则称之为枚举手续. 在这里，我们就用这一方式，明确定义了"枚举手续"这一概念. 有关枚举手续的具体举例，在各个领域中可谓比比皆是，现举例说明如下.

例 1　上文所述关于时空分割之历史性著名言论即为一例. 亦即我们在一英寸大小的材料上，如果划一线条，再划一线条，…，如此无止境地、一条一条地划下去，只要一直滞留于这种继续不断地划的进程中(going)，那么这一具体的枚举手续所面对的就是潜无限. 然而，就像上文中贝尔所说："如果我们已经在这一英寸大小的材料上划下了无穷多条线"，或者像列宁所指出的："如果我们把这种无限的划分进程进行到底！" 这就是说，如果把所说的这个具体的枚举手续进行完毕(gone)，或者说穷举(gone) 了这一具体的枚举手续，那么这一具体的枚举手续此时所面对的就不再是潜无限，而是已经完成了的实无限，所以无止境的枚举手续是现在进行式(going)，而将枚举手续进行完毕，或者说穷举了这一具体的枚举手续就是完成式(gone). 简言之，由枚举到穷举的转换，也就是由现在进行式到完成式的转换，也就是由潜无限到实无限的转换.

例 2　给定一只理想的空杯子 G，再给一个无穷背景世界中的精确谓词 P，我们找来一个满足 P 的对象 x，就将 x 投入 G 中，再找来一个满足 P 的对象 y，再将 y 投入 G 中，因为 P 在无穷背景世界中，所以这种逐个逐个地找，又逐个逐个地投的手续，当然可以无止境地进行下去. 但是只要这种枚举手续尚未进行完毕，而仍在枚举的进程中(going)，那么它所面对的就是潜无限，又若穷举了这种枚举手续，亦即如果你能够而且已经找到了所有满足 P 的对象，并且又都将其投进了 G(gone)，则它此时所面对的就是实无限.

例 3　从古代原子论者德谟克里特(Democritus) 和古典集合论创始者康托(Cantor) 的观念出发，任何一个无穷集合都是一个实无穷集合. 现给定一个无穷集合 A，再给一个无穷背景世界中的选择标准 f，我

们就可按 f 在 A 中选出一个元素来，再选出一个元素，…，这种按 f 在 A 中逐个逐个地选出元素的手续，也是一种具体的枚举手续.

例 4 康托古典集合论中的一一对应原则用在无穷集合上，也是一种枚举手续. 因为任给两个无穷集合 A 和 B，再给一个对应规则 f，如果 A 和 B 在 f 之下能够建立起一一对应关系，那么当我们在 A 中任选一个元素，则由 f 必能在 B 中找到唯一确定的元素与之对应，再在 A 中另找一个元素，则由 f 又能在 B 中找出与之对应的唯一确定的元素，反之亦然，因为 A 和 B 都是无穷集合，所以，这种手续可以无止境地进行下去，所以，这也是一种枚举手续.

例 5 在极限论中运用 ε-N 方法所定义的无穷大序列，其思想方法和布劳威尔构造性地构造自然数的思想方法完全一致，都是设定一个限度，超出这个限度，再设定一个限度，再超出这个限度，而且不论你设定的限度 N 有多大，总能超出这个限度，所以这种设定超出，再设定再超出的手续可以无止境地进行下去，因而，这又是一种具体的、典型的枚举手续.

形形式式之枚举手续的实例是无穷无尽的，通过如上一些实例的讨论，可知任何无止境的枚举手续，所反映或指称的只是潜无限. 只有将无止境的枚举手续进行完毕，即穷举了该枚举手续之后，才能面对或指称实无限. 反过来说，对于实无限而言，由于它必定是完成式，因此必须将枚举手续进行完毕，也就是穷举了某种枚举手续. 而对于潜无限而言，由于它永远是现在进行式，从而必须否定能将枚举手续进行完毕，亦即必须否定穷举枚举手续，因此我们有：

$$\text{非有限的枚举手续}\begin{cases}\text{实无限：肯定穷举该枚举手续 (gone)；}\\ \text{潜无限：否定穷举该枚举手续 (going).}\end{cases}$$

总之，认识和理解潜无限与实无限的切入点是可变的，但万变不离其宗，那就是实无限必定是完成式，潜无限必定是现在进行式. 为此，达到也好，穷举也好，归宗都是完成式. 又永远达不到也好，永远在枚举进程中也好，归宗都是现在进行式. 由于现在进行式(going) 不同于完成式(gone)，枚举不同于穷举，永远达不到不同于达到，所以潜无限与实无限，无论从生成的角度还是存在的角度看，都不存在任何意义上的等同，否则可谓既不尊重前人，也不尊重历史，特别是对卷入两种无穷观之争的大学者们是大不敬.

综上所述，至少可以认为，我们已经在哲学层面上规范了潜无限和实无限的区别和联系. 归纳起来，无非就是上文所论之一个出发点和两

个切入点，再次罗列如下：

（Ⅰ）一个出发点：

非有限 { 实无穷：必定是完成式（gone）；潜无穷：永远是现在进行式（going）.

（Ⅱ）切入点之一：

非有限进程 { 实无限：肯定达到进程终极处；潜无限：否定达到进程终极处.

（Ⅲ）切入点之二：

非有限的枚举手续 { 实无限：肯定穷举该枚举手续；潜无限：否定穷举该枚举手续.

可以认为：在逻辑层面上没有直接的潜无穷和实无穷概念，因为逻辑只研究可能性对象，不研究存在性对象，而潜无穷与实无穷都是一种存在性概念，也就是亚里士多德所说的潜在的存在（潜无限）和柏拉图所说的实在的存在（实无限）. 因此逻辑与无穷观没有直接的关联性，然而间接的关联性却必然是有的，因为逻辑能为研究存在性对象提供推理工具，就像二值逻辑演算是近代公理集合论的推理根据和推理工具那样. 大家知道，二值逻辑演算中有一个全称量词 $\forall$，解释并读为“每一”或“所有”，今后深入研究下去，我们将引进所谓枚举量词 E，只能解释并读为“每一”，又规定全称量词 $\forall$ 只允许解释并读为“所有”. 如此在无穷论域中严格区分了“每一”（枚举）与“所有”（穷举）之后，枚举量词 E 将成为研究与刻画潜无限性对象的逻辑工具之一，而全称量词 $\forall$ 将成为研究与刻画实无限性对象的逻辑工具之一. 并且逻辑层面上的“E”正好相应于哲学层面上的枚举进程，而逻辑层面上的“$\forall$”却相应于哲学层面上的穷举手续.

就数学层面而言，对于潜无限观念和实无限观念的直接使用是很普遍的，例如在极限论中，为了避免贝克莱（Berkeley）悖论，运用 ε-N 和 ε-δ 方法所定义的无穷大序列和无穷小序列，完全采纳了潜无穷观念的思维方式. 又如在布劳威尔的直觉主义构造性数学中，则是彻底不兼容实无穷观念的，他们完全否认全体自然数能构成一个封闭领域的认识，因而从基于布劳威尔对象对偶直觉的无止境地生成的自然数的进程开始，直到展形连续统的构成，全部是建立在永无止境的潜无限的观念之上的. 但在古典集合论和近代公理集合论中，从康托到策梅罗（Zermelo）对于无穷集合的存在和构造，都非常强调实无限的完成式. 给定一个康托－策梅罗意义下的无穷背景世界中的造集谓词 P，则由 P 所决定的唯一确

定的无穷集合 $A=\{x \mid P(x)\}$ 是由且仅由所有满足谓词 P 的对象 x 所构成的，这就是在完全穷举所有满足 P 的对象 x 的基础上来产生这个集合 A 的. 所以在古典集合论和近代公理集合论中的任何一个无穷集合的构造，都立足于完成了的实无穷观念.

实际上，康托古典集合论的创立，标志着数学的发展进入了数学研究对象由有限、潜无限量性对象到实无限量性对象的再扩充时代. 在康托以前，众多数学家都持潜无限观念. 例如，大数学家高斯(Gauss)在给舒马赫(Heiurich Shumacher)的著名信件中就以十分坚定的口气表明了他的见解："我反对把无穷量当作一种完成了实体来使用，这在数学中是绝对不允许的. 无穷不过是谈及极限时的一种说话方式而已."[183] 所以道本(J. W. Dauben)在《康托的无穷的数学和哲学》一书中指出："康托清楚地意识到，他的超穷数和超穷集合论面临着传统见解的反对. 他著述《基础》一书的目的之一就是论证这种对于完成了的、实无穷的反对是毫无根据的，他希望以一种无可反驳的方式来对高斯那样的数学家、亚里士多德那样的哲学家以及托马斯・阿奎那(Thomas Aquinas)那样的神学家作出答复."[183]"康托相信，反对在数学、哲学和神学中使用实无穷是基于一种广泛流传的错误见解."[183]

最后，就计算机科学理论这一层面而言，潜无穷观念的直接使用及其基础性是最重要的，因为计算机科学理论特别强调能行性. 大家知道，人们对直觉主义学派的历史性评价中有一条是完全肯定的，那就是："联系到计算机数学的发展，直觉主义学派的构造性观点和方法有重要意义，他们的能行性要求尤其具有十分重大的现实意义，因为在使用电子计算机时，不能不注意能行性."[5] 在无穷观问题上，正如上文所述，直觉主义学派及其构造性数学系统，乃是彻底贯彻潜无穷观念，而决不兼容实无穷观念.

下文将在引入一系列简记符号的基础上，给出潜无限和实无限的描述性定义，今后在建立形式系统时，所说的一些简记符号亦可以作为相应的"算子"符号被引入.

(1) 简记符号"↑"的名称是"开放进行词". 解释并读为：

(a) 现在进行式，

(b) 每一__________ $=_{df}$E __________，

(c) 枚举__________ $=_{df}$enu __________，

(d) 无限趋近于__________ $=_{df}$ina __________，

(e) 无止境地__________ $=_{df}$kne __________.

(2) 简记符号"丅"的名称是"正完成词". 解释并读为:

(a) 肯定完成式,

(b) 所有________ $=_{df}$ ∀ ________,

(c) 穷举________ $=_{df}$exh ________,

(d) 达到________ $=_{df}$rea ________.

(3) 简记符号"丅̸"的名称是"反完成词". 解释并读为:

(a) 否定完成式,

(b) 否定所有________ $=_{df}$ ¬∀ ________,

(c) 否定穷举________ $=_{df}$ ¬exh ________,

(d) 永远达不到________ $=_{df}$ ¬rea ________.

此外,我们把"有限"简记为"fin","无限"简记为"inf","潜无限"简记为"poi","实无限"简记为"aci",亦即我们有:fin $=_{df}$"有限",inf $=_{df}$"无限",poi $=_{df}$"潜无限",aci $=_{df}$"实无限".

如所知,在古典集合论和近代公理集合论中,所谓有穷集合 A,指的是存在着某个自然数 $n \in N$,能使有 A 和 n 建立一一对应关系,亦即若有 $\exists n(n \in N \wedge A \sim n)$,则称 A 为有穷集合,并记为 $A[\text{fin}]$,进而无穷集合 A 被定义为非有穷集合,并记为 $A[\text{inf}]$,亦即 $A[\text{inf}] =_{df} \neg A[\text{fin}]$. 而且所有的无穷集合(即所有的非有穷集合)都是完成了的实无穷集合,因为任何一个无穷集合 $A[\text{inf}] = \{x \mid P(x)\}$,都是穷尽了所有满足谓词 P 的对象 x 汇集起来构成的. 所以在这样的数学模型背景下,"无穷"被定义为"非有限",从而在那里,要么坚持"非有限"即"实无限"的二分法原则,要么坚持"潜无限"和"实无限"之间界线模糊而不予明确区分的思想原则. 在这里,我们将避开这样的数学模型背景,并在更抽象的层面上将"潜无限"与"实无限"概念定义如下:

$$\text{aci} =_{df} \neg\, \text{fin} \wedge \uparrow \wedge \top,$$

$$\text{poi} =_{df} \neg\, \text{fin} \wedge \uparrow \wedge \not\top.$$

这就是说,无论是"潜无限"(poi)还是"实无限"(aci),首先应该不是有限(¬ fin)并已进入现在进行式(↑),这是"潜无限"和"实无限"的一个共同的基础,亦即都有了一个通向无限的可能性(¬ fin ∧ ↑),然后在这个共同的基础上,再明确给定"潜无限"和"实无限"的分界线. 这个分界线就是:实无限必须是肯定完成式(丅:∀、exh、rea),而潜无限却必须是否定完成式(丅̸:E、enu、ina),既然完成式已被否定,因此,现在进行式就被强化为永远是现在进行式,从而永远处于"每一"(E)、"枚举"(enu)和"无限趋近"(ina)的进程中.

6.2 数学系统对两种无穷观的兼容性

正如本书第2章和第3章曾已论及的那样，任何一门学科体系，都有它的理论基础，就像任何一座大楼，一定有它的墙基一样，数学学科当亦不能例外. 自从十九世纪康托创建古典集合论以后，人们发现任何一个数学概念，总能由集合论的基本概念出发，将它定义出来，任何一条数学定理，总能从集合论的思想规定（即公理）出发，把它推导出来，总体一句话，有了集合论，就能把整个数学推导出来. 因此，大家公认集合论可以作为数学学科的理论基础. 然而十分不幸的是在古典集合论中发现了不少自相矛盾的东西，即所谓出现不少悖论. 因此，若将整个数学比作一座高楼大厦的话，那么数学大厦的墙基上就有不少裂缝. 这使大家非常不安，为此，数学家们就对古典集合论进行改造，建立了没有悖论的近代公理集合论，近现代数学就奠定在近代公理集合论基础上，这使得数学大厦有了一个相对牢固的墙基. 但是作为近现代数学之理论基础的近代公理集合论有几种版本，现在人们常用的一种版本被简记为ZFC系统，它由策梅罗首创，并由弗朗克尔（Frankel）改进而建成.

现在仅就数学分析这一学科而言，由于微积分初创时期，使用了含混不清的无穷小概念，结果贝克莱指出了其中的矛盾，这就是著名的贝克莱悖论. 为了清除贝克莱悖论，数学家们建立了极限论，因此极限论成为微积分的理论基础，而极限论的理论基础又是ZFC系统. 因此，若将微积分、极限论和集合论依次简记为N、C、Z，那么我们就将微积分及其理论基础所构成的数学系统简记为$N\cup C\cup Z$，现在让我们来阐明$N\cup C\cup Z$就是一个典型的兼容潜无限和实无限的数学系统. 首先人人皆知集合论强调实无限，因为任何一个无穷集合$A=\{x\mid P(x)\}$是由所有具有性质P的对象x汇集起来构成的，从而必定是完成式，即使从枚举具有性质P的对象x来生成这个无穷集合A，也必须穷举了这种枚举手续之后，才能生成它. 因此无论怎样构成A都是完成式，从而它所面对和指称的是实无限. 但在另一方面，极限论为了避免贝克莱悖论，而运用ε-δ与ε-N方法所定义的无穷大序列和无穷小序列，则全面贯彻了无止境地设定限度与超出限度的潜无穷观念，进而避开了实体无穷大和实体无穷小概念的使用. 因而就微积分及其理论基础$N\cup C\cup Z$作为一个数学系统来看，至此就已经兼容了潜无限和实无限. 不仅如此，即使单独立足于近代公理集合论而言，也不可能像康托和策梅罗所认为的那样，在系

统内彻底贯彻了实无限而完全不涉及潜无限.事实上,这是不可能的,首先,从康托到策梅罗,处处都使用一一对应原则,正如6.1节中所论枚举手续之例4而言,一一对应原则用在无穷集合上,也是一种枚举手续,而枚举手续在没有穷举该枚举手续之前,永远是一种现在进行式(going),从而它所面对和指称的必然是潜无限.其次,大家知道恰由全体自然数构成的集合N有无穷多个元素,数学中常用符号∞或ω来表示无穷多,因此,我们说N有ω个元素,即指自然数集合N有无穷多个元素.我们把自然数集合N中的自然数由小到大地排列成自然数列λ:{1,2,3,…,n,…},再令k表示自然数由小到大并可无止境地增大的变量,因此变量k可以无限增大并无限地趋近于ω.但由于数学中规定所有自然数的数值都有限,即任何自然数都小于无穷,因此ω不是自然数.所以变量k虽然可以无限地增大,并无限地趋近于ω,但却永远不能达到ω,所以变量k趋向ω的进程永远是现在进行式(going),所以它所面对和指称的必然是潜无限.如上所论足以表明近代公理集合论系统本身就是一个兼容两种无穷观的系统,绝不是什么完全不涉及潜无限的彻底贯彻实无限的系统.现在再让我们来看看极限论,虽然极限论运用ε-δ和ε-N方法定义了无穷大和无穷小,但正如前文所述,在定义过程中,全部采取了设定限度超出限度,然后再设定再超出这种无止境的现在进行式(going),因而都直接面对和指称潜无限观念.特别是在极限论中,任一变量x趋向其极限x_0时,一概不谈x是否最终达到或达不到极限点x_0之事,甚或明文写出$0<|x-x_0|<\varepsilon$,由此变量可以无限接近极限点x_0,但永远达不到x_0,从而变量x趋向其极限点x_0永远是现在进行式(going)而不是完成式,在此无疑是贯彻了潜无限观念.但在极限论中能真正做到完全避开实无限而彻底贯彻潜无限么?事实上根本做不到,因为在极限论中不能不涉及无理数概念,有如π和$\sqrt{2}$等等,但是任何一个无理数的解析表达式必须面对和指称实无限,因为小数点后的小数必须是可数无穷多位,而可数无穷的概念无疑是一种典型的实无穷观念.亦即无理数θ在小数点后面所有的小数$p_i(i=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$的足码所构成的集合就是实无穷自然数集合,完全不同于直觉主义使用无理数的构造性方法.再说若要在极限论基础上去发展微积分,则就更离不开诸如实数集和有理数集等各种各样的实无限论域.因而极限论本身也必然是一种兼容潜无限和实无限的理论系统.

综上所论,不仅整个近现代数学及其理论基础是一个兼容潜无限和实无限的理论系统,就其涉及无穷观的一些子系统而言,也不能不是一

个兼容两种无穷观的系统，否则将不成其为近现代数学系统.

6.1 节主要规范了潜无限与实无限的区别和联系，其核心内容就是明确了两条：其一是实无限必定是现在进行式(going) 转化为完成式(gone)，其二是潜无限必定是由现在进行式(going) 强化为永远是现在进行式(going). 然后又从最终达到与永不可达，以及枚举手续与穷举枚举手续这样两个不同的切入点，给出了现在进行式与完成式的两个具体模型或两个具体实现. 由此而为本书讨论近现代数学及其理论基础对两种无穷观的兼容性规范了它的依据. 而在本节中，主要阐明了如下两点：

(1) 近现代数学及其理论基础在整体上是一个兼容两种无穷观的理论系统；

(2) 就其涉及无穷观的一些子系统而言，也都是一种兼容两种无穷观的系统.

归纳起来说，近现代数学及其理论基础中，兼容两种无穷观的思维方式和实际内容比比皆是. 从而其中既不存在彻底贯彻实无限的子系统，也不存在任何彻底贯彻潜无限的子系统，所论表明：兼容两种无穷观的思维方式与分析方法是近现代数学及其理论基础自身所固有，从而给出了系统内使用兼容两种无穷观的分析方法的合理性依据.

6.3 数学系统中的一对互相矛盾的隐性思想规定

6.3.1 隐性思想规定之一

正如 3.1 节中所指出的那样，作为整个近现代数学之理论基础的 ZFC 系统的公理分为两部分：其一称为逻辑公理，指的是作为推理工具的逻辑演算系统中的相关公理或推理规则等等，而逻辑演算系统通常又分为命题演算和谓词演算两大块. 其二叫做非逻辑公理，指的是 ZFC 系统中那些关于构造集合和集合存在性的那些公理. 因此就整个近现代数学及其理论基础的出发点和不加证明的思想规定应包括如下几个方面的内容：

(1) 逻辑公理：指的就是命题演算与谓词演算中的那些公理、推理规则和量词的解释约定；

(2) 非逻辑公理：指的就是集合论系统中的有关构造集合或集合存在性的那些公理.

(3) 演绎推理中通用的一些推理手段和推理方法有如下几种：数学归纳法、超穷归纳法和反证法等. 当然，这些推理方法的合理性也是可以从 ZFC 系统中推导出来的.

所说的这些逻辑公理、非逻辑公理和推理方法，在系统内均被明确立出且有其明文的陈述形式. 但在这里，我们将立足于兼容两种无穷观的思维方式和分析方法，进一步深入研究所说的这些公理和方法中的若干隐性思想规定，分别讨论如下：

(1) 全称量词引入律($\forall_+$)和全称量词 $\forall$ 的解释约定：在 ZFC 的谓词演算系统中，有两个量词，其一叫做全称量词，记为 $\forall$，被解释为"所有"或"每一"，并且对我们的研究论域中的每个研究对象 x，约定"每一个 x 如何如何"完全等同于"所有 x 如何如何"，全称量词符号 $\forall$ 是从英文单词 All 的第一个字母演变而来. 其二叫做存在量词，记为 $\exists$，被解释并读为"存在"或"有"，存在量词的符号 $\exists$ 是英文单词 Exist 的第一个字母的变形. 在谓词演算中，有一条推理规则被称为全称量词引入律，并记为($\forall_+$). 如果用逻辑演算中的语言来表达，就是($\forall_+$)：$\Gamma \vdash A(a)$，a 不在 Γ 中出现，则 $\Gamma \vdash \forall x A(x)$. 这是什么意思呢?任何一本逻辑演算教材中，总会对($\forall_+$)的涵义作如下的阐述，($\forall_+$)无非是指演绎推理中的如下的推理思想：即若在某学科论域中任选个体 α，总能在某种前提下推出 α 具有性质 A，则就结论在同样的前提条件下，可推出论域中所有个体都具有性质 A. 当然要强调在论域中对个体 α 的选取是任意的，不受任何约束，特别不受推出它具有性质 A 的那个前提 Γ 的约束. 所以在($\forall_+$)中明确规定"α 不在 Γ 中出现". 例如，在演绎推理中往证"任一线段之中垂线上所有的点均与线段两端等距离"这一命题时，就是在中垂线上任选一点，证其与线段两端等距离，然后就结论中垂线上所有的点均与线段两端等距离，当然，对于该点的选取，除了必须在中垂线上之外，不受任何其他约束. 因此，在这种推理思想的支配下，全称量词 $\forall$ 必然地既可解释为"每一"，亦可解释为"所有"，而且，"每一 x 使得什么结论成立"就完全等同于"所有 x 使得什么结论成立". 但在这里应指出：在一个无穷论域中任选一个个体 α，或者说对于论域中的每一个个体，正如我们已在 6.1 节中所讨论过的那样，仅仅是一种枚举手续. 而任何无止境的枚举手续在没有进行完毕之前，永远是现在进行式(going)，或者说只有穷举了某种枚举手续之后，才能是完成式(gone). 然而枚举手续一经穷举之后就不再存在什么"每一"或"任选"，此时就只有已经完成了的"所有"或"一切". 从而上面所论之"每一"或"任选"在没有穷举之前，就只能面

对和指称潜无限. 但在($\forall_-$)推理和 $\forall$ 解释中的"所有",当然已是穷举枚举手续之后的完成式,从而它所面对和指称的必定是实无限. 因此($\forall_-$)中之任选一个个体所获得的结果就等于论域中所有个体都有该结果的推理思想,或 $\forall$ 解释中的"每一"等于"所有",就必然隐性地贯彻了一条思想规定:这就是现在进行式等于完成式,或者说潜无限等于实无限.

(2) 康托-策梅罗意义下的无穷集合之势与序数:任给无穷集合 $A = \{x \mid P(x)\}$,因为是在汇集了所有具有性质 P 的对象之后才构成的,所以是完成式. 即使采用枚举具有性质 P 的对象 x 的枚举手续中去生成 A,也必须在穷举了该枚举手续后才能生成集合 A,所以 A 所面对和指称的必然是实无穷,所以人人皆知集合论中任何无穷集合的势都是实无穷势. 所谓集合的势,就是指该集合中所包含的元素的个数有多少而已. 既然如此,恰由全体自然数所构成的集合 $N = \{x \mid n(x)\}$(其中 $n(x)$ 是"x 为一自然数"的简记)当亦不能例外,即 N 是一个实无穷集合,它所面对和指称的是实无限. 集合 $N = \{x \mid n(x)\}$ 有无穷多个元素,数学中常用符号 ∞ 或 ω 来表示无穷多,因此,我们说 N 有 ω 个元素,即指自然数集合 N 有无穷多个元素. 现在我们将自然数集合 N 中的自然数由小到大地排列为自然数列 λ:$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$,再令 k 表示自然数由小到大并可无止境地增大的变量,因此变量 k 可以无限增大并无限地趋近于 ω. 但由于数学中规定所有自然数的数值都有限,即任何自然数都小于无穷,因此 ω 不是自然数. 所以变量 k 虽然可以无限地增大,并无限地趋近于 ω,但却永远不能达到 ω. 所以变量 k 趋向 ω 的进程永远是现在进行式(going),因此自然数序列 λ 在这一意义上所面对和指称的必然是潜无限. 因为 λ 不过是将 N 中的自然数进行编序而已,所以 N 和 λ 是同一个集合,但由上文所说,着眼于 N 的势,它指称实无限,着眼于 λ 的序数,它指称潜无限. 从而在此同样隐性地贯彻了潜无限等于实无限的思想规定.

应当指出,我们在此仅用自然数集合 N 这个特例来作论述,这仅仅是为了使我们的讨论尽可能地通俗易懂. 实际上,由于 ZFC 系统接受选择公理,从而良序定理成立,而且任何良序化了的序数集 A 中的所有序数都小于 A 本身的序数. 所以只要具有相关的专业知识,直接就能在普遍意义上将如上所获之结论推广到任何一个实无穷集合 $A = \{x \mid P(x)\}$. 这就是说,近代公理集合论中有关无穷集合之势和序数的种种思想规定,正在普遍意义上隐性地贯彻着潜无限等于实无限的思想规定.

(3) 数学归纳法：大家知道，数学归纳法中的归纳步骤，指的是判断 A 或性质 P 只要对 n 成立，则就能理论上证明判断 A 或性质 P 对 $n+1$ 也成立. 这一事实表明对于判断 A 或性质 P 成立一事，不论怎样设定限度，总能超越这个限度，而且不论设定的限度 N 有多大，依然总能超越这个限度. 从而归纳步骤所面对和指称的必然是现在进行式(going) 的潜无限. 但数学归纳法由这个归纳步骤就结论判断 A 或性质 P 对所有的 n 都成立，而判断 A 或性质 P 对所有 n 都成立的结论，显然应将由 n 到 $n+1$ 的这种枚举手续穷举之后才能获得. 所以数学归纳法的结论所面对和指称的必须是完成式的实无限. 从而我们要问，如果像通常那样大家认同现在进行式(going) 不等于完成式(gone)，潜无限不等于实无限，那么由基于潜无限的归纳推理证明手段，又如何能跨越到基于实无限的归纳结论中去呢?除非大家已经隐性地认同了现在进行式(going) 等于完成式(gone)，或者潜无限等于实无限，才能完成所说的这种跨越. 所以，数学归纳法这种推理方法的合法使用和通行，同样是在隐性地贯彻潜无限等于实无限的思想规定.

类似的隐性思想规定可能还会举出一些，但在这里已经没有这个必要了. 一个理论系统，如果真能将上文所论之隐性思想规定贯彻始终，甚或将其明确立为公理而又能自圆其说，这也可谓自成体系或自成一家学说. 然而下文的讨论将显示出在近现代数学及其理论基础中，并没有能将上文所论之潜无限等于实无限的隐性思想规定贯彻到底.

6.3.2 隐性思想规定之二

正如本书 5.5.2 中讨论建立中介系统之哲学背景时所指出的那样，自从亚里士多德(Aristotle) 以来，形式逻辑区分了反对对立和矛盾对立. 如果两个概念都有其自身的肯定内容，并在同一内涵的一个更为高级的概念(即上位概念) 中，二者之间存在着最大的差异，那么这两个概念就是反对对立概念，例如，善和恶，美和丑，男人和女人，真命题和假命题，潜无限和实无限等等. 又当两个概念中，其中一个的内涵否定另一个的内涵，那么这两个概念就是矛盾对立概念. 例如，劳动和非劳动，资本和非资本，男人和非男人，真命题和非真命题，实无限和非实无限，美和非美，善和非善等等.

今设 P 为一谓词(概念或性质)，若对任一对象 x 而言，总是要么 x 完全满足 P，要么 x 完全不满足 P，亦即不存在这样的对象，它部分地满

足 P，又部分地不满足 P，则我们就说 P 是清晰谓词，并简记为 dis$P$. 又若对谓词 P，存在有某个对象 x，它部分地具有性质 P，又部分地不具有性质 P，则称 P 是模糊谓词，并记为 fuz$P$. 我们把符号 $\sim$ 叫做模糊否定词，解释并读为"部分地"，于是 $\sim P(x)$ 表示对象 x 部分地具有性质 P，而 $P(x)$ 表示对象 x 完全具有性质 P. 我们又把符号$\dashv$叫做对立否定词，解释并读为"对立于"，并将 P 的反对对立面记为$\dashv P$. 如此，我们就用 P 和$\dashv P$ 抽象地表示一对反对对立概念. 而以 P 和$\neg P$ 抽象地表示一对矛盾对立概念. 如所知，在经典二值逻辑演算中，形式符号$\neg$的名称是否定词，解释并读为"非".

现任给 P 和$\dashv P$，如果对象 x 满足 $\sim P(x) \wedge \sim \dashv P(x)$，则称对象 x 为 P 和$\dashv P$ 的中介对象，这也就是哲学上常讲的"亦此亦彼"，所谓"此"与"彼"，指的就是 P 与$\dashv P$. 例如，黎明就是黑夜转化到白昼的中介，0 是亦正亦负的中性数，半导体就是导体与绝缘体的中介，如此等等. 如所知，认识论中也有所谓对立面总有中介对象存在的基本原则，其中所说的对立面指的就是反对对立概念 P 和$\dashv P$.

然而在经典二值逻辑和经典数学中，除了拒不考虑和研究普遍存在且为人们所经常使用的模糊性质或模糊概念外，特别是在论域的适当限制下，完全否认中介对象的存在，进而便在所给论域中，反对对立(P，$\dashv P$)和矛盾对立(P，$\neg P$)被视为同一，以致$\neg P$ 就是$\dashv P$，这就是"非美即丑"、"非善即恶"等等的由来. 所以在二值逻辑思想的长期统治之下，必然出现$\dashv P = \neg P$ 的思维方式. 例如，真命题 P 和假命题$\dashv P$ 本来是一对反对对立概念(P，$\dashv P$)，但在二值逻辑思维方式的命题论域中，就有非真命题即假命题之说. 又如在人这一论域中，就必然有非男即女的论断. 同样地，在无穷这个概念中，也就必然出现非实无限即潜无限，非潜无限就是实无限的结论. 抽象地说，只要在二值逻辑演算的框架内，任何反对对立面(P，$\dashv P$)的上位概念一经限定，则在论域中，必有$\neg P$ 即$\dashv P$ 的思想规定.

近现代数学被奠定在近代公理集合论基础上，在近代公理集合论中，无论是 ZFC 系统还是 NGB 系统，均以二值逻辑演算作为配套的推理工具，因此，经典二值逻辑演算中的所有推理规则和公理，均为近现代数学及其基础自身所拥有和接受. 因此，二值逻辑演算中的反证律($\neg$)被确认，用形式语言来表述反证律就是：$\Gamma, \neg A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash A$. 反证律的实际含义就是演绎推理中常用的反证法推理. 在二值逻辑演算系统内，由反证律($\neg$)开始，可以证明排中律：$\vdash A \vee \neg A$ 和无矛盾律 $\vdash \neg(A \wedge \neg$

A). 又由上文可知,在二值逻辑演算框架内,反对对立面(P,$\rceil P$)和矛盾对立面(P,$\neg P$)合而为一,从而$\rceil P$就是$\neg P$. 因此作为反对对立面(P,$\rceil P$)的潜无限(poi)和实无限(aci)在这里必然是矛盾对立面(P,$\neg P$),因此,潜无限(poi)与实无限(aci)在二值逻辑框架内,必然代表了一个概念或事实的肯定(A)和否定($\neg A$)的两个方面,从而必然满足排中律和无矛盾律,亦即应有 $\vdash$poi$\vee$aci 并且 $\vdash\neg$(poi$\wedge$aci). 从而可以证明 poi $\neq$ aci,就像 A 和$\neg A$ 既要满足排中律 $\vdash A\vee\neg A$ 又要满足不矛盾律 $\vdash\neg(A\wedge\neg A)$,就不可能有 $A=\neg A$ 一样. 所论表明:在近现代数学及其基础理论中,由反证律($\neg$)开始,必将导致隐性地贯彻"潜无限不等于实无限"这一思想规定.

6.3.3 两点注记

(1) 上文运用兼容两种无穷观的分析方法,对近现代数学及其理论基础中的逻辑公理、非逻辑公理以及通用的推理方法系统地进行了梳理. 梳理结果最终显示,其中有一部分公理或方法隐性地贯彻了"潜无限等于实无限"的思想规定,却又有另一些公理隐性地贯彻了"潜无限不等于实无限"的思想规定. 从而这一分析结果启示我们,应在更深层次上去研究近现代数学及其理论基础的相容性问题,并在逻辑数学技术层面上使这种隐藏较深的问题浮出水面,最终还应出台解决方案. 但应指出,所说的这种深层次的逻辑数学矛盾,不可能出现在经典二值逻辑演算系统中,因为上文所论之隐性矛盾的阐明,无论您从纯逻辑公理出发,还是直接从非逻辑公理出发,实际上都已涉及一系列非纯逻辑概念,诸如潜无限、实无限、进行式、完成式、可达与不可达、枚举与穷举等等,因此,我们应该到极限论与集合论中去探索这种可能存在的深层次矛盾. 上文所论也从本质上指明,逻辑系统往往能有相容、可靠与完备的证明,而非纯逻辑系统至今却难以实现这一点.

(2) 在此应该指出,6.2 节告诉我们,兼容潜无限(poi)与实无限(aci)的思维方式和分析方法为近现代数学自身所固有,而 6.3.2 节的讨论又告诉我们,潜无限(poi)不等于实无限(aci)的思想规定亦为近现代数学自身所固有. 反过来说亦就是:兼容 poi 与 aci 的思维与方法,以及 poi $\neq$ aci 的思想规定,都不是人们外加到近现代数学及其理论基础中去的. 因此,在我们进一步研究近现代数学系统的合理性与相容性问题的过程中,充分运用 poi $\neq$ aci 这一思想规定,以及兼容 poi 与 aci 这一思维

方式和分析方法时，在近现代数学系统内是有其合理性根据和无可非议的.

6.4 Cantor-Zermelo 意义下的无穷集合概念的自相矛盾性

6.4.1 简记与注释

一组简记：在 6.1 节中，给出了潜无限(poi)和实无限(aci)的描述性定义，并给出了简记符号“$\uparrow$”、“$\top$”、“$\not\top$”的名称和解读方式. 在这里，我们将根据本节的数学背景和具体模型，选取其中相适应的解读方式，并在此基础上再组合成一组简记及其解读方式如下：

$a \uparrow b =_{df}$“变量 a 无限趋近于极限 b”，

$a \top b =_{df}$“变量 a 达到极限 b”，

$a \not\top b =_{df}$“变量 a 永远达不到极限 b”，

$a \uparrow b \wedge a \top b =_{df}$“变量 a 无限趋近于极限 b 并且达到极限 b”，

$a \uparrow b \wedge a \not\top b =_{df}$“变量 a 无限趋近于极限 b 并且永远达不到极限 b”.

此外，我们令 @ 为代表某种数量的符号，既可代表有穷多，亦可代表无穷多. 具体地说，@ 既可代表某个自然数 n，亦可代表 ∞，更可代表种种超限势，有如 $\aleph_0$、$\aleph_1$、…、$\aleph_n$、…，甚或连续统势 C. 在此基础上再引入如下简记：

$S\lceil k\ @\ {}_{df}$“理想容器 S 中存贮有 @ 个对象”.

注释(Ⅰ)：在下文的讨论中，我们仍然贯彻和使用兼容两种无穷观的分析方法和潜无限不等于实无限(poi $\neq$ aci)的思想规定. 这是有其合理性根据的，因为 6.2 节和 6.3 节已经充分的讨论表明：兼容两种无穷观的分析方法和 poi $\neq$ aci 的思想规定均为近现代数学系统及其基础理论自身所固有，而不是人们所外加进去的.

注释(Ⅱ)：在集合论中，势和序型是两个不同的概念，一个有序集合的势是唯一确定的，而其序型不是唯一确定的，例如对于自然数集合 N 可有无穷多种不同的排序方法，举例如下：

(1) $1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$

(2) $2, 3, 4, \cdots, n, n+1, \cdots, 1$

(3) $1,3,5,\cdots,2n+1,\cdots,2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

(4) $\cdots,n+1,\cdots,3,2,1$

对于 N 的上述(1)、(2)、(3)、(4)种不同的排序方法所产生的序型依次记为 $\omega,\omega+1,\omega+\omega=2\omega,\omega^*$. 但是 N 的势 $\overline{N}$ 是唯一确定的. 又在集合论中,特称良序集的势为阿列夫势,良序集的序型为序数,于是良序后的自然数集 N 的势 $\overline{\overline{N}}$ 记为 $\aleph_0$(读为阿列夫零),这是唯一确定的,而上述序型(1)、(2)、(3)(即 $\omega,\omega+1,2\omega$)却表示良序后的 N 的不同的序数,所以阿列夫势和序数也是两个不同的概念,但在论域与排序方法的特定限制下,也可视为相同. 例如,我们特定限制自然数集合 N 只有按 λ 序列这一种排序方法时,可将 $\overline{\overline{N}}$ 与 $\overline{N}$ 视为相同,通常用符号"$\upharpoonright$"表示限制,即 $\upharpoonright =_{df}$"限制",因此我们有:

$$N\{x \mid n(x)\}\upharpoonright\lambda(1,\cdots,1,2,3,\cdots,n,\cdots)\rightarrow\overline{\overline{N}}=\overline{N},$$

亦可简记为

$$N\upharpoonright\lambda\Rightarrow\aleph_0=\omega.$$

特别是作为自然数系统建设方案之一的 Von Neumann 方案,其指导原则在于从 $\varnothing$ 出发,使得每个自然数都是较小自然数的集合,从而每个自然数既是其较小自然数的集合的势,也是其较小自然数集的序数,两者没有区别,这当然是有穷序数的现象,到了无穷就未必保持,但是我们可以给出某种特定的限制,例如 $N\upharpoonright\lambda\Rightarrow\aleph_0=\omega$. 这也就是人们通常都采纳自然数集共有 ω 个元素的陈述方式,而往往舍弃 N 有 $\aleph_0$ 个元这种更贴切之说的原因.

注释(Ⅲ):今设 S 为一理想容器,并列出如下5个判断:

(α) S 中存贮的 D-原子有@个,

(β) S 中存贮的 D-原子没有@个,

(γ) S 中存贮的 D-原子的个数或数量已达到@个,

(ξ) S 中存贮的 D-原子的个数或数量没有达到@个,

(η) S 中存贮的 D-原子的个数或数量永远达不到@个.

在上述5个判断之间,我们能直接确认的关系和结论有如下5条:

(Ⅰ) (α)与(β)不能同时成立,即$\neg[(\alpha)\wedge(\beta)]$,

(Ⅱ) (γ)与(ξ)不能同时成立,即$\neg[(\gamma)\wedge(\xi)]$,

(Ⅲ) (α)与(γ)是等价的,亦即(α)iff(γ),

(Ⅳ) (β)与(ξ)是等价的,亦即(β)iff(ξ),

(Ⅴ) 由(η)可导出(ξ),亦即(η)$\vdash$(ξ).

今以 k 表示 D-原子的个数无限制地增多并无限趋近于@的变量,

则由上述简记可将结论（Ⅲ）表示为如下的符号表达式：

$$(\square)\ S\overline{|k}\ @\ \text{iff}\ k\uparrow @\ \text{and}\ k\ \top\ @.$$

现在我们用集合论语言并针对自然数集合 N 来翻译如上的讨论，亦即理想容器 S 对应于自然数集合 N，D-原子对应于 N 的元素（即自然数），@ 对应于自然数集合的势 $\aleph_0$，如果限定 N 只有由小到大这一种排列方式，则由上述注释（Ⅱ）所述 $N\upharpoonright\lambda\Rightarrow\aleph_0=\omega$ 而知可用 ω 取代 $\aleph_0$。如此，我们亦有如下 5 个相应的判断：

（α'）N 包含的自然数有 ω 个，

（β'）N 包含的自然数没有 ω 个，

（γ'）N 包含的自然数的个数已经达到 ω 个，

（ξ'）N 包含的自然数的个数没有达到 ω 个，

（η'）N 包含的自然数的个数永远达不到 ω 个.

根据以上 5 个判断的内涵，可有如下结论：

（1）（α'）与（β'）不能同时成立，即$\neg[(\alpha')\wedge(\beta')]$，

（2）（γ'）与（ξ'）不能同时成立，即$\neg[(\gamma')\wedge(\xi')]$，

（3）（α'）与（γ'）是等价的，亦即（α'）iff（γ'），

（4）（β'）与（ξ'）是等价的，亦即（β'）iff（ξ'），

（5）由（η'）可推出（ξ'），亦即（η'）$\vdash$（ξ'）.

今以 k' 表示自然数的个数无限制地增多并无限趋近 ω 的变量，并且引入简记：

$\lambda\overline{|k'}\omega =_{\mathrm{df}}$“自然数集合 N 包含有 ω 个两两相异的自然数”.

则由简记和上述结论（3）可有如下重要结论：

$$(**)\lambda\overline{|k'}\omega\ \text{iff}\ k'\uparrow\omega\wedge k'\ \top\ \omega.$$

6.4.2 可数无穷集合的不相容性

现在我们来证明下述定理.

定理（Ⅰ） 任何一个可数无穷集合都是自相矛盾的非集.

证明 第一步：我们先证明恰由全体自然数构成的集合：$N=\{x\mid n(x)\}$（其中 $n(x)=_{\mathrm{df}}$“x 为自然数”）是一个自相矛盾的非集. 现在先将 $N=\{x\mid n(x)\}$ 中的元素按其大小顺序排成如下的自然数序列：

$$\lambda:\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}\mid\omega.$$

对于 λ 序列，我们有如下两条熟知的定理：

定理 A 全体自然数都是有限序数，即设 $N=\{x\mid n(x)\}$，则 $\forall n$

$(n \in N \rightarrow n < \omega)$.

定理 B 全体自然数个数为可数无穷多，即 $N = \{x \mid n(x)\}$ 中共有 ω 个（参见 6.4.1 节中之注释（Ⅱ））互不相同的元素.

今由定理 A，我们特将 λ 序列表示为如下的由 ω 个两两相异的不等式组成的可数无穷序列：

$$N^{<} = \{1 < \omega, 2 < \omega, 3 < \omega, \cdots, n < \omega, \cdots\}.$$

现给出如下简记：

$\mathrm{Ine} =_{\mathrm{df}}$“不等式”(inequality)，

$n(\mathrm{in})\mathrm{Ine} =_{\mathrm{df}}$“$n$ 是 $N^{<}$ 中某个不等式中所含有的唯一确定的自然数”，

$\mathrm{Ine}k =_{\mathrm{df}}$“$N^{<}$ 中第 k 个 Ine”，

$n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}k =_{\mathrm{df}}$“$n$ 是 $N^{<}$ 中第 k 个不等式所含有的唯一确定的自然数”.

现令 $\forall =_{\mathrm{df}}$“所有”，$E =_{\mathrm{df}}$“每一”. 根据经典二值逻辑演算对全称量词的解释约定应有 $\forall = E$，从而应有如下结论：

(∇_1) 在任何场合 E 与 $\forall$ 可以相互替换.

在 $N^{<}$ 中应有：

$$EnEk(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}k \rightarrow n = k). \qquad (*)$$

例如 $N^{<}$ 中第 9(k) 个不等式中所含有的唯一确定的自然数的数值必定是 9(n). 不仅如此，还可用数学归纳法证明下述结果：

$$\forall n(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}n), \qquad (1)$$

亦即对 $N^{<}$ 中的每一个不等式总保持着 $n = k$. 现由上文重要结论(∇_1)，用 $\forall$ 取代上述$(*)$中 E 的出现，就得到：

$$\forall n \forall k(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}k \rightarrow n = k).$$

从而又有如下重要结论：

(∇_2) $\forall n \forall k(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}k \rightarrow n$ 与 k 的出现可以互相替换).

今以 k' 表示自然数的个数无限增长并无限趋近 ω 的变量，并使用简记符号：$\lambda\lceil\overline{k}\omega =_{\mathrm{df}}$“自然数集合 N 包含有 ω 个两两相异的自然数”，

则由 6.4.1 之注释（Ⅲ）之重要结论$(**)$而知：

$$\lambda\lceil\overline{k}\omega \text{ iff } k' \uparrow \omega \wedge k' \top \omega.$$

成立. 又由上述定理 B 可知 $\lambda\lceil\overline{k}\omega$ 成立，从而下述命题为真：

$$(k' \uparrow \omega) \wedge (k' \top \omega) \qquad (***)$$

现在同样因为 $N^{<}$ 中计有 ω 个两两相异的不等式，所以当我们用 k 来表示 $N^{<}$ 中不等式的个数不断地增多这一变量时，则变量 k 同样不仅可以

无限地趋向 ω，而且必须多达 ω 个，从而类同于上文对 λ 序列的讨论，当我们计算 $N^{<}$ 中不等式的个数时，我们亦应有真命题：$(k \uparrow \omega) \wedge (k \top \omega)$.

既然 $(k \uparrow \omega) \wedge (k \top \omega)$ 为真，则由缊涵式真值表可有：

$$\forall n \forall k(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}k \rightarrow (k \uparrow \omega) \wedge (k \top \omega)),$$

又由前文重要结论(∇_2)可用 n 取代上式中 k 的出现而有：

$$\forall n \forall n(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}n \rightarrow (n \uparrow \omega) \wedge (n \top \omega)).$$

此式也就是：

$$\forall n(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}n \rightarrow (n \uparrow \omega) \wedge (n \top \omega)),$$

由此可得：

$$\forall n(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}n) \rightarrow \forall n((n \uparrow \omega) \wedge (n \top \omega)). \tag{2}$$

但在另一方面，对于 $N^{<}$ 中各个不等式中所含有的各个自然数的数值而言，虽然 n 亦可无限地趋近于 ω，但决不允许达到 ω，否则必将矛盾于上述定理 A，即矛盾于 $\forall n(n \in N \rightarrow n < \omega)$ 这一公认的结论. 因此，当我们立足于 $N^{<}$ 中之所有不等式中所含有的自然数的数值时，我们就只能有 $(n \uparrow \omega) \wedge (n \not\top \omega)$ 为真. 为之我们又有：

$$\forall n(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}n \rightarrow (n \uparrow \omega) \wedge (n \not\top \omega)),$$

由此可得：

$$\forall n(n(\mathrm{in})\mathrm{Ine}n) \rightarrow \forall n((n \uparrow \omega) \wedge (n \not\top \omega)). \tag{3}$$

由(1)和(2)使用分离规则就有：

$$\forall n((n \uparrow \omega) \wedge (n \top \omega)). \tag{4}$$

同理由(1)和(3)可得：

$$\forall n((n \uparrow \omega) \wedge (n \not\top \omega)). \tag{5}$$

必须承认上述(4)和(5)是互相矛盾的. 这表明 $N^{<}$ 不相容，也就是 λ 序列和 $N = \{x \mid n(x)\}$ 是一个自相矛盾的非集.

第二步：今设 G 为 ZFC 框架下的任何一个可数无穷集合，则 G 中一切元可用自然数去编号，从而由已证 $N = \{x \mid n(x)\}$ 为非集而直接推知 G 为自相矛盾的非集. 证毕.

6.4.3 ZFC 框架中的不可数无穷集合的不相容性

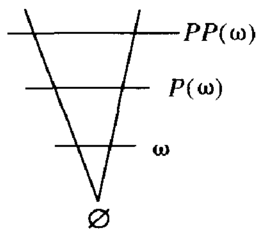
现在我们将在 6.4.2 所证之定理的基础上，证明下述定理.

定理(Ⅱ) 在确认近代公理集合论 ZFC 中之 $N = \{x \mid n(x)\}$ 为非集的前提下，近代公理集合论 ZFC 系统中的原来意义下的各种各样的所谓不可数集合要么不存在，要么也都是自相矛盾的非集.

证明 大家知道康托(Cantor)古典集合论的造集原则是概括原则，并且无条件地使用概括原则，最后导致悖论的出现，在各种各样的悖论中，最为基本或核心的一个悖论就是下述著名的罗素(Russell)悖论：即设 Σ 为恰由全体非本身分子集构成的集合，但是若设 Σ 为非本身分子集，则可推出 Σ 为本身分子集. 又若设 Σ 为本身分子集，则又能推出 Σ 为非本身分子集，哪种说法都说不通，故矛盾.

近代公理集合论系统立足于修改概括原则而给出避免悖论的方案. 大家知道，在 ZFC 的非逻辑公理中，其核心的造集原则有：(1) 空集公理，(2) 无穷公理，(3) 幂集公理. 其中(1) 和(2) 用以构造可数无穷集合，并且是无条件地直接规定某集合的存在，又在(1) 和(2) 的基础上再配以替换公理等其他公理给出自然数集合 $N = \{x \mid n(x)\}$，然后又在(1) 和(2) 的基础上通过幂集公理而造出不可数集合，再配以其他公理给出 $R = \{x \mid r(x)\}$，此处 $r(x) =_{df}$"x 为一实数"，并由此而为微积分奠基.

在 ZFC 中可以证明上文所说的 Σ 为非集，或说 Σ 不是 ZFC 的集合. 既然如此，那就不能再问 Σ 是本身分子集还是非本身分子集，从而避免了罗素悖论的出现，同样可以认为，在确认 Σ 为非集的前提下我们也就不能再在 ZFC 的框架下去问什么集是 Σ 的子集，或者再问什么集是 Σ 的幂集等等. 据右图可知，ZFC 中不存在本元，并有如下重要结论：



(＊) ZFC 的任何非空集合 $A \neq \varnothing$ 的任何元素都必须是 ZFC 的集，并且 ZFC 的任何非空集合 $A \neq \varnothing$ 的任何子集或幂集都必须是 ZFC 的集合，并且只有在 A 是 ZFC 的集合的前提下，才能用幂集公理去构造 A 的幂集 $P(A)$.

现在分两种情况来继续我们的论述：

(1) 如果我们在建造 ZFC 框架的起始阶段就发现了 $N = \{x \mid n(x)\}$ 为一非集，并由 6.4.2 中之定理知任何可数集合皆为非集，那么也就不可能再用幂集公理去构造什么可数集合的幂集了，因为由上述重要结论(＊)知道，只有在确认某集是 ZFC 的集合的前提下，才能用 ZFC 的幂集公理去构造该集的幂集，因此在已知 $N = \{x \mid n(x)\}$ 为非集的前提下，再去构造什么 $P(N)$ 就没有任何意义了，就像已知 Σ 为非集，则就再没有什么 $P(\Sigma)$ 可言一样，因而在此情况下，可谓 ZFC 框架下的不可数集合根本不存在.

(2) 然而真实的历史进程并非如此，我们是在 ZFC 被久远使用之后才发现 $N = \{x \mid n(x)\}$ 和任何可数集合均为非集的，从而在此真实的历

史进程中又要分两种情况讨论：

① 首先对于ZFC的任何一个不可数集合A而言，我们可在ZFC意义下，用狭义选择公理在A中选出一个可数子集A_C，当然$A_C \subset A$，现知A_C为非集，然而由上述重要结论（*）知，ZFC的任何非空集合的任何子集都必须是ZFC的集合，而今不可数集合A却拥有了一个自相矛盾的非集A_C为其子集，这是ZFC所不允许的，从而A就不可能再是ZFC的集，或者说不可数集合A在ZFC框架下是一个非集.

② 今再设$P(B)$在尚未发现可数集合为非集的情况下由ZFC的可数集合B通过幂集公理构造出来的，那么在ZFC框架下，必有$B \in P(B)$，而后来我们又证明了可数集合B为非集，但由上述重要结论（*）可知，ZFC的任何集合的任何元素必为ZFC的集，而在此处既已证B为非集，则在原来意义下所构造的幂集$P(B)$却由此而拥有了一个非集B为其元素，从而矛盾于重要结论（*），从而此时该幂集$P(B)$也只能是一个自相矛盾的非集了.

总之，在确认ZFC中之$N = \{x \mid n(x)\}$为非集的前提下，ZFC中的原来意义下的各种各样的所谓不可数集合要么不存在，要么也都是自相矛盾的非集.

由于ZFC框架下的任何实无穷集合要么是可数集合，要么是不可数集合，综合6.4.2中的定理和本定理可有如下结论：

（* * *）ZFC框架下的任何无穷集合都是自相矛盾的非集.

6.4.4 若干相关的历史性直觉判断

6.4.2与6.4.3中所证之定理也是历史的必然，并早已为先师们所觉察，我们在此所做的，不过是用数学手段证明了先师们相关直觉判断的正确性.

例如，莱布尼兹（Leibniz）指出过："所有整数的个数这一提法自相矛盾，应该抛弃."[156:p396]

又例如，自从古典集合论出现悖论以后，Hausdorff就曾不胜感慨地直接提醒大家说："这一悖理的使人不安，倒不在于产生了矛盾，而是我们没有预料到会有矛盾：一切基数所组成的集，显得是如此先验地无可置疑，正如一切自然数所组成的集一样地自然可信，由此就产生了如下的不确定性，即会不会连别的无限集，亦即一切无限集，都是这种带有矛盾的似是而非的非集."[10],[157:p27]

然而最为引人注目和惊奇的莫过于鲁宾逊（Robinson）在1964年所

发表的见解："关于数学基础，我的立场（见解）是基于如下的两个主要原则（或观点）：

（1）无穷集合按任何词义来说都不存在（不论在实际上或理论上都不存在），更精确地说，关于无穷集合的任何陈述或大意陈述在字面上简直都是无意义的.

（2）但是我们还是应该如通常那样去从事数学活动，就是说当我们做起来的时候，还是应该把无穷集合当作似乎是真实存在的那样."[70]

在这里，我们坚信上述鲁宾逊的观点（1）是一种非常深刻的直觉判断，绝不是什么不负责任的胡言乱语，至于鲁宾逊的上述观点（2），可能是出于当时的某种无奈. 在这里，我们相信 6.4.2 和 6.4.3 中的研究结果，应该与鲁宾逊的直言和大师们的直觉是一致的.

人们不禁要问，如果由于ZFC框架下的实无穷集 $A=\{x \mid P(x)\}$ 这个概念存在严重问题而必须放弃的话，则众多奠基于$\{x \mid P(x)\}$意义下的集合论之上的数学分支（即整个近现代数学）岂不要统统被抛弃？回答是否定的. 事实上，整个近现代数学完全可以奠定在一种潜无限数学系统的基础上而被完整地保留下来. 原因在于康托－策梅罗尽管在$\{x \mid P(x)\}$意义下构造了各种各样的实无限集合，但当他们回过头来分析处理各种实无限集合的诸元素的性质、元素与元素之间的关系和结构，以及基于其上的种种函数关系时，在本质上全部采纳了潜无限思维，也就是贯穿了以潜无限分析式取代实无限生成式的思想原则. 为此，只要所说的这种潜无限数学系统仍然采用经典二值逻辑演算为推理工具，并将其中的全称量词 $\forall$ 作适当的改造，我们就能在内涵上完整地将整个近现代数学推导出来. 然而，人们还可能会质疑，这种潜无限数学系统会不会是直觉主义构造性数学的翻版，回答也是否定的. 其根本区别在于：

（1）直觉主义构造性数学所配套的逻辑工具是直觉主义逻辑（见本书 4.2 节），而所说的这种潜无限数学系统却仍以经典二值逻辑演算为配套的逻辑工具.

（2）直觉主义构造性数学的出发点不是任何意义下集合论，而是布劳威尔（Brouwer）对象对偶直觉意义下的自然数论（见本书 4.2 节）.

（3）直觉主义构造性分析学奠基于布劳威尔的展形连续统，（见本书 4.2 节）而这种潜无限数学系统下的分析学将会奠基于一种弹性自然数系统的弹性幂集基础上.

总之，两者各有各的出发点，各有各的建造数学大厦的方法，两者的内涵丰富程度也会大不相同.

6.5 再论古典集合论与近代公理集合论中之无穷集合概念的矛盾性

6.5.1 弹性集合与柯西(Cauchy)剧场

对于谓词 P:“自然数”，首先大家公认这是无穷背景世界中的谓词，完全不同于“现在在这个教室里的学生”等一类有穷背景世界中的谓词，然而无穷背景世界又要分实无穷和潜无穷两类，其中康托(Cantor)就认为谓词 P:“自然数”属于实无穷背景世界，因而可以构造实无穷集合 $N=\{x\mid n(x)\}$，然而直觉主义者布劳威尔却从根本上否认实无穷，所以自然数只能处在一个一个地被构造的进程(going)中，虽然可以超越任何一个给定的界限，但却永远停留于生成的状态(going)中，因此决不能形成一个完成了(gone)的封闭领域. 如所知，柯西-外尔斯特拉斯(Cauchy Weierstrass)在极限论中，为了避免贝克莱(Berkeley)悖论而运用 ε-N 与 ε-δ 方法所定义的无穷大序列和无穷小序列，也完全采纳了上述布劳威尔无止境地构造自然数的潜无限思维方式，这就是设定一个限度，超出了这个限度，再设定一个限度，再超出这个限度，而且不论你所设定的限度 N 有多大或者限度 ε 有多小，我们总能超出这个限度，亦即全面贯彻了无止境地设定限度再超出限度的潜无穷观念，进而避开了实体无穷大和实体无穷小概念的使用. 现在我们用 $\Lambda=\{x\mid n(x))$ 这样的方式来表示这种自然数不断构造下去的进程，亦即用最后那个圆括号“)”来表示自然数不断地被构造的现在进行式(going)，而相对地把康托意义下的最后那个花括号“}”来表示自然数已经形成了一个封闭领域的完成式(gone)，在这里我们特称实无穷集合 $N=\{x\mid n(x)\}$ 为刚性集合，而称那个潜无穷意义下的潜无穷集合 $\Lambda=\{x\mid n(x))$ 为弹性集合，该弹性集合的一个完全等价的陈述形式就是下述柯西剧场，今设

$$\lambda_n:\{1,2,3,\cdots,n\}$$

为以 1 为首元，然后依次相接，且由小到大地排列而成的一个由 n 个自然数构成的集合，其中末元 n 是某个固定的自然数. 现令 λ_n 中的末元 n 变动起来，即令末元 n 不再固定而可以无限地增大，却又永远持有 $n<\omega$，这就构成了一个末元 n 无限地增大却又永远有限的潜无限进程，我们把这一进程(going)表示为

$$C\text{-}\Lambda:(1,2,3,\cdots,\dot{n}),$$

并称之曰柯西剧场，我们也把 $C\mathscr{A}$ 中的各个自然数看成是柯西剧场中诸座位的编号，从而柯西剧场是一个自然数不断增长的潜无穷进程(going)，亦就是上文所描述的柯西-外尔斯特拉斯基于无止境地设定限度再超出限度的潜无穷观念去不断地构造自然数的现在进行式(going)的弹性集合 $\mathscr{N} = \{x \mid n(x)\}$.

上述所谓弹性集合与刚性集合，仅仅是对自然数的永无止境地构造进程和全体自然数汇成整体的一种特殊情形的描述. 其实我们可以将相关概念抽象到一般情形. 6.1 之末曾指出，为了给出潜无限(poi)和实无限(aci)的描述定义，曾引入简记符号 ↑(开放进行词)、$\overline{\top}$(反完成词)、⊤(正完成词)以及它们的各种解释方式，今选取其中相适应的解读方式，进一步组合一些简记及其解读方式如下：

$x(\text{In})A =_{\text{df}}$“对象 x 被包容到集合 A 中”；

$x(\neg\text{In})A =_{\text{df}}$“对象 x 不能被包容到集合 A 中”；

$\text{E}xP(x) \uparrow x(\text{In})A =_{\text{df}}$“任何满足谓词 P 的对象 x 总能无止境的被包容到集合 A 中”；

$\forall xP(x) \top x(\dot{\text{In}})A =_{\text{df}}$“肯定所有满足谓词 P 的对象 x 都被包容到集合 A 中”；

$\forall xP(x) \overline{\top} x(\text{In})A =_{\text{df}}$“否定所有满足谓词 P 的对象 x 能被全部包容到集合 A 中”；

$\text{E}x\neg P(x) \top x(\neg\text{In})A =_{\text{df}}$“肯定任何或每一个不满足谓词 P 的对象 x 总不能被包容到集合 A 中”.

在此应注意，在 6.4.2 之定理的证明过程中，我们引进了枚举量词 E，解释并读为“任一”或“每一”，不得解释为“所有”. 而全称量词 ∀ 解释并读为“所有”，不得解释并读为“每一”.

现任给无穷背景世界中的谓词 P 和一个集合 $\mathscr{A}$，如果满足条件：

$$(\text{E}xP(x) \uparrow x(\text{In})\mathscr{A}) \wedge (\forall xP(x) \overline{\top} x(\text{In})\mathscr{A}) \wedge (\text{E}x\neg P(x) \top x(\neg\text{In})\mathscr{A})$$

则称集合 $\mathscr{A}$ 为谓词 P 的弹性集合，记为 $\mathscr{A} = \{x \mid P(x)\}$.

又对于任何无穷背景世界中的谓词 P 和集合 A，如果满足条件：

$$(\text{E}xP(x) \uparrow x(\text{In})A) \wedge (\forall xP(x) \top x(\text{In})A) \wedge (\text{E}x\neg P(x) \top x(\neg\text{In})A)$$

则称集合 A 为谓词 P 的刚性集合，记为 $A = \{x \mid P(x)\}$.

特殊地，给定谓词 n：自然数和集合 N，如果满足条件：

$$(\text{E}xn(x) \uparrow x(\text{In})N) \wedge (\forall xn(x) \top x(\text{In})N) \wedge$$

$$(\mathrm{E}x \neg n(x) \top x(\neg \mathrm{In}) N)$$

则称集合 N 为刚性自然数集合，记为 $N = \{x \mid n(x)\}$.

又对谓词 n：自然数和集合 $\mathcal{N}$，如果满足条件：

$$(\mathrm{E}xn(x) \uparrow x(\mathrm{In})\mathcal{N}) \wedge (\forall xn(x) \not\top x(\mathrm{In})\mathcal{N}) \wedge$$
$$(\mathrm{E}x \neg n(x) \top x(\neg \mathrm{In})\mathcal{N})$$

则称集合 $\mathcal{N}$ 为弹性自然数集合，记为 $\mathcal{N} = \{x \mid n(x)\}$，亦即上文所述之柯西剧场

$$C\text{-}\mathcal{N}:\{1,2,3,\cdots,\dot{n}\},$$

实际上，上述柯西剧场 $C\text{-}\mathcal{N}$ 或弹性集合 $\mathcal{N}$ 的两条基本性质是：

(a) n 可以无限制地增大或构造下去，从而明确反映出 $C\text{-}\mathcal{N}$ 或 $\mathcal{N}$ 的"非有限"的性质.

(b) 在 n 无限增大的进程中又强调恒保持 $n < \omega$，从而明确否定 n 达到 ω，充分反映出 $C\text{-}\mathcal{N}$ 或 $\mathcal{N}$ 的"潜无限"特点.

如此，该柯西剧场中的座位数一方面是可以无限制地增加的，另一方面却又有如下重要结论：

(＊) 柯西剧场永远不可能拥有 ω(即实无限)个座位.

亦即座位个数的增长永远停留在增长的进程(going)中而没有增长完毕. 这标志着当我们从生成的角度去看这个 $C\text{-}\mathcal{N}$ 剧场时，它永远是一种现在进行式(going)，又当我们从存在的角度去看这个 $C\text{-}\mathcal{N}$ 剧场时，它无疑是一个动态的、潜在的和不确定的.

顺便指出，这里所说的剧场之所以命名为柯西剧场，并简记为 $C\text{-}\mathcal{N}$ 剧场，而没有用布劳威尔的名字去命名，原因在于借此明确指出，现有的研究与讨论完全属于非构造性的近现代数学系统，在此既没有涉及任何直觉主义逻辑，也没有与直觉主义构造性数学发生任何关系. 相反地，如果布劳威尔的名字在文中出现过多，则就有可能引发认为我们的讨论已进入直觉主义构造性思维范畴的误解.

6.5.2 古典集合论与近代公理集合论中的狭义柯西剧场现象

现在先让我们来观察在某个普通剧场中所举行的一次特殊的电影招待会的入场过程，如图 6.1 所示，这是某市的一个 500 座位的剧场，某日要在该剧场举行一次专门招待该市少尉以上军官的电影招待会. 入场前持有招待券的观众先要在剧场休息厅集中等候. 剧场有两个入口处，分别由甲、乙两位工作人员看守，其中甲负责验证观众身份，乙负责检查

入场人数是否少于或等于 500，因为不允许有观众站着看电影，因此在入场前甲先向检查人员发问，休息厅中持券等待入场的观众身份如何？回答说都为本市少尉以上军官，因此甲认可观众入场．然而乙又要求检查一下人数，回答说人手 1 券等待入场者正好 500 位，从而全体入场，招待会顺利结束．

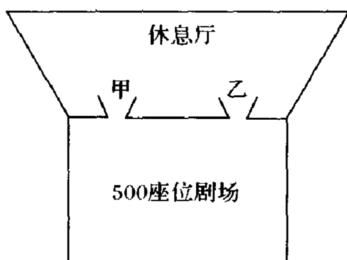


图 6.1

下文我们将在上述柯西剧场中举行一次专门招待全体自然数的电影招待会．但在此前先让我们温习一下如下两条熟知的定理．

定理 1 全体自然数的个数为可数无穷多，亦即自然数集合 N 中共有 ω 个自然数．

定理 2 全体自然数都是有限序数，即设 n 为自然数，则必有 $n<\omega$．

其实如上两条熟知的定理可归结为如下一个结论：

"存在有 ω 个两两相异的数值有限的自然数"．

现在如图 6.2 所示，我们将在柯西剧场中举行电影招待会，从静态

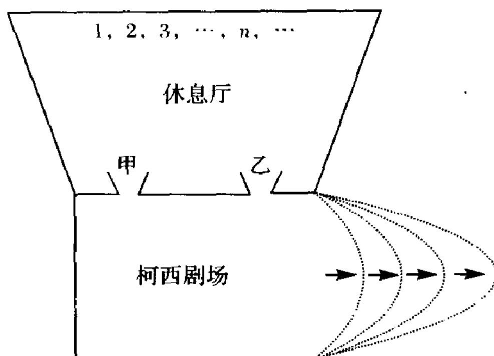


图 6.2

框架看，柯西剧场与前述普通剧场无异，也有一个休息厅和两个入口处，并分别有甲、乙两人看守，分工是甲负责验证观众身份，乙负责检查入场观众是否超员，同样不准有观众站着看电影．从动态框架看，柯西剧场的

座位数可以无限制地增多，却又永远是有限多个座位. 现在全体自然数均已人手一券在休息厅中等待入场，因此甲首先问等待入场的观众是何身份？回答说全是自然数，从而全是有限序数，甲可毫不犹豫地认可放行，因为身份全部符合. 然后，乙又问休息厅中等待入场的观众有多少？回答说共计 ω 个. 此时乙立即声称柯西剧场提供不了这么多座位，因此不能入场，否则全部冲进来的话，C-N剧场的结构就要被破坏了. 因为乙深知 6.5.1 中所讨论并获得的重要结论(×)，那就是柯西剧场永远不可能拥有 ω(即实无限)个座位，因为柯西剧场是一个潜无限的进程，亦即其座位的个数的增长永远停留在增长的进程(going)中，而并没增长完毕. 所以乙心中第一个重要判断是：

(Ⅰ)"ω 个两两相异的数值有限的自然数"是绝不可能同时进入柯西剧场看电影的.

但在另一方面，当乙首先在心中作出上述判断(Ⅰ)并拒绝休息厅中观众(全体自然数)同时入场之后，心中却又在纳闷不已. 因为他这时又想到了上述定理 2，并作了如下一番推理：首先，任取一自然数 m，因由定理 2 而知必有 $m<\omega$，而 C-N剧场至少可有 $m+1$ 个座位，所以 m 有座位，因此举不出任何一个无座位的观众来，既然无一反例可言，当然全都会有座位.

何况还可用数学归纳法或反证法证明全体观众都有座位，例如用反证法证明如下.

证明 先将作为观众的全体自然数由小到大排成自然数序列：

$$\lambda:\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$$

从而 λ 为一良序集. 再反设 λ 中存有在柯西剧场中没有属于自己的座位的自然数，现令 S 表示 λ 中所有在柯西剧场中无座位的自然数所构成的集合，则 S 为 λ 的子集，由熟知定理知 S 有一最小元，记为 m，因 $m\in S$，故 m 在柯西剧场中没有属于自己的座位. 另一方面，由柯西剧场的结构可知柯西剧场至少能拥有 $m+1$ 个座位，因此 m 必有座位. 矛盾. 从而反设不成立. 从而全体自然数在柯西剧场中都有一个属于自己的座位.

证毕.

既然 ω 个两两相异的自然数(即全体自然数)在柯西剧场中都各有一个属于自己的座位，当然可以各就各位地同时入场看电影了. 为之，乙又在心中作出如下第二个重要判断：

(Ⅱ)"ω 个两两相异的数值有限的自然数"完全可以同时进入柯西剧场看电影.

由于上述两个判断(Ⅰ)和(Ⅱ)是自相矛盾的，这不仅使得这次要在柯西剧场中举办的电影招待会取消而不了了之. 而且更令人不安的是：人们在集合论中所公认的"存在有 ω 个两两相异的数值有限的自然数"这一结论根本不能成立. 或者说，在古典集合论和近代公理集合论中所确认的那个恰由全体自然数所构成的实无限刚性集合 $N=\{x \mid n(x)\}$ 是一个自相矛盾的、似是而非的非集.

今设 G 为近代公理集合论 ZFC 框架下的任何一个可数无穷集合，则 G 中一切元可用自然数去编号，从而在已证 $N=\{x \mid n(x)\}$ 为非集的结论下，可以直接推知 G 为自相矛盾的非集. 综上所论，我们已经利用上述柯西剧场现象证明了下述定理.

定理 古典集合论和近代公理集合论中任何一个可数集合都是似是而非的非集.

6.5.3 超穷弹性集合与超穷柯西剧场

如所知，在近代数学中，人们曾把基于自然数系统的数学归纳法推广到基于超穷序数的超穷归纳法，并在数学推理中广为应用. 现在我们也把上面陈述的柯西剧场概念加以推广，建立一个超穷柯西剧场，记为 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$，现设 $A[\overline{wos}]$ 为一不可数的由超穷序数编成的良序集，并且 $\overline{A[\overline{wos}]}=\Omega$，亦就是将不可数序数集 $A[\overline{wos}]$ 的序数记为 Ω，另一方面，在素朴集合论和近代公理集合论中有如下两条熟知的定理：

定理 1 任何一个良序集 A 不能与 A 的任何一个截段 A_a 相似，并且 $\overline{A_a}<\overline{A}$.

定理 2 一切小于序数 α 的序数所组成的良序集 w_a 的序数 $\overline{w_a}$ 就是序数 α，即 $\overline{w_a}=\alpha$.

从而我们就依如上所论之 $\overline{A[\overline{wos}]}=\Omega$ 为背景，建立或定义超穷柯西剧场的概念如下：

现设 Ω 为一不可数的序数，则一切小于序数 Ω 的序数可以组成一个良序集，记为 $A[\overline{wos}]$，由定理 2 知 $\overline{A[\overline{wos}]}=\Omega$，又由定理 1 知，对 A 中任一序数 η，总有 $\eta<\Omega$，现令 $\dot{\eta}$ 表示 $A[\overline{wos}]$ 中的可以任意增大但又永远小于 Ω 的序数变量，于是我们就按如下的记法

$$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J:\{1,2,\cdots,n,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,\omega\cdot 2,\cdots,\omega^2,\cdots,\dot{\eta}\}$$

来表示我们所要建立的超穷柯西剧场，该 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 的两条基本性质是：

(a′) 其中 η 是一序数，η 可以无限制地增大，并且不论 η 是一个有前邻元和后继元的非极限序数，还是一个没有前邻元的极限序数，有如 ω、$\omega\cdot n$、ω^2、ω^n、$\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$、…，我们总可用 $\eta+1$ 的方式将序数 η 增大，若将 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 中的序数视为 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 中诸座位的编号的话，则对任何一个编号为 η 的座位而言，我们总可用 $\eta+1$ 的方式去扩充 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 的座位数，并且永无止境.

(b′) 序数 η 虽然可以无限制地增大，但却永远小于 Ω，亦即恒持有 $\eta<\Omega$，这样的规定是合理的，因由上述定理 1 和 2 知有：

$$\forall\eta(\eta\in A[wos]\rightarrow\eta<\Omega).$$

通常我们也称前述基于自然数系统的柯西剧场 $C\text{-}\mathcal{N}$ 为狭义柯西剧场，而称上述超穷柯西剧场 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 为广义柯西剧场，若用弹性集合来表示，则 $C\text{-}\mathcal{N}$ 就是 $\mathcal{N}=\{x\mid n(x)\}$，而今设

$$O(x)=_{\mathrm{df}}\text{“}x\text{ 为一序数”}$$

则上述 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 亦可表示为超穷弹性集合：

$$O_n=\{x\mid O(x)\wedge x<\Omega\}$$

狭义的 $C\text{-}\mathcal{N}$ 和广义的 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 的根本区别在于 $C\text{-}\mathcal{N}$ 中不存在无前邻元的极限序数，而广义的 $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$ 中却存在着没有前邻元的极限序数，因而其中包含着各种不同层次的潜无限的进行式(going)和实无限的完成式(gone).

6.5.4 ZFC 框架下的超穷柯西剧场现象

现在让我们首先证明下述定理：

定理 ZFC 框架下的任何一个不可数的实无穷集合都是自相矛盾的非集.

证明 设 $A=\{x\mid P(x)\}$ 为 ZFC 框架中的一个不可数的集合，由于 ZFC 接受选择公理，从而良序定理成立，亦即任何非空集合都可排成良序集，所说的不可数集合 $A=\{x\mid P(x)\}$ 也不能例外. 为之，我们先将 A 编成良序集 $A[wos]$，因为 $A[wos]$ 为良序集，故有一相应的序数 α，即 $\overline{A[wos]}=\alpha$，今设 $\gamma\in A[wos]$，则由 6.5.3 中所引之定理 1 知，由 γ 所产生的截段 $A_\gamma[wos]$ 不能与 $A[wos]$ 相似，并且 $A_\gamma[wos]$ 有一序数 γ，即 $\overline{A_\gamma[wos]}=\gamma$，而且 $\gamma<\alpha$(仍由 6.5.3 中所引之定理 1)，现将所有由 $A[wos]$ 的元素所产生之截段的序数分别去取代 $A[wos]$ 中的各个元素，从而得到一个由 $A[wos]$ 所产生的序数集 $A\overline{[wos]}$，当然 $A[wos]$ 与

$A[\overline{wos}]$相似，从而我们可有$\overline{A[wos]}=\overline{A[\overline{wos}]}=\alpha$，并有如下结论：

(＊＊) $\forall\eta(\eta\in A[\overline{wos}]\rightarrow\eta<\alpha)$

由于$A[\overline{wos}]$不可数，且为所有小于序数α的序数构成的良序集，由6.5.3中所引之定理2知$\overline{A[\overline{wos}]}=\alpha$，根据6.5.3中所建立的广义柯西剧场概念，我们首先建立一个相应于本定理的下述超穷柯西剧场：

$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J:\{1,2,\cdots,n,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,\omega+n,\cdots,\omega\cdot 2,\cdots,\omega\cdot n,\omega^{\omega},\cdots,\eta\}$

其中η为一序数，η可以无限增大，但却永远小于$\overline{A[\overline{wos}]}=\alpha$，亦即恒有$\eta<\alpha$. 我们把$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$中的序数视为$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$中的座位的编号，从而一方面由于$\eta$可以无限制地增大，而且不论$\eta$是一个有前邻元的非极限序数，还是一个无前邻元的极限序数，我们总可用$\eta+1$的方式去扩大$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$的座位数. 另一方面又由于$\forall\eta(\eta\in A[\overline{wos}]\rightarrow\eta<\alpha)$而明确否定$\eta$能增大达到$\alpha$，从而知有如下结论：

(▽) $C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$永远不能拥有$\alpha$个座位.

现在我们就在$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$中举办一次招待$A[\overline{wos}]$中全体序数的电影招待会，于是我们首先有如下结论：

(Ⅰ) 不可能让$A[\overline{wos}]$的所有序数各有一个属于自己的座位，同时入场$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$看电影（因由(▽)知$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$提供不了$\alpha$个座位），或设$P(\eta)=_{df}$“$\eta$在$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$中拥有一个属于自己的唯一确定的座位”因此，本结论(Ⅰ)可表示为：

$$\neg\forall\eta(\eta\in A[\overline{wos}]\rightarrow P(\eta)).\qquad\text{(I)}$$

否则，若设有$\forall\eta(\eta\in A[\overline{wos}]\rightarrow P(\eta))$，则因$A[\overline{wos}]$有$\alpha$个成员，从而$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$必须拥有$\alpha$个座位，从而矛盾于上文结论(▽).

但在另一方面，对于每一个$\xi\in A[\overline{wos}]$，由于$\xi<\alpha$，从而在$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$中之$\eta$无限增大的情况下，总可使得$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$拥有$\xi+1$个座位，不论$\xi$是极限序数还是非极限序数，$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$拥有$\xi+1$个座位一事总能办到，从而$\xi$在$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$中拥有一个属于自己的唯一确定的座位，亦即：

$$E\eta(\eta\in A[\overline{wos}]\rightarrow P(\eta))$$

由于在经典二值逻辑演算中规定$E=\forall$，因此E与$\forall$可以互相取代，从而上式就是

$$\forall\eta(\eta\in A[\overline{wos}]\rightarrow P(\eta))\qquad\text{(II)}$$

实际上，(Ⅱ)即表示对于$A[\overline{wos}]$中的所有序数都有一个属于自己的唯一确定的座位，从而可以同时进入$C\text{-}\mathcal{N}\text{-}J$看电影，上述(Ⅰ)和(Ⅱ)是互相矛盾的. 从而$A[\overline{wos}]$是一个自相矛盾的非集.

另一方面，如前文所述，良序集 $A[wos]$ 与 $A[\overline{wos}]$ 具有相似对应关系，并有 $\overline{A[wos]} = \overline{A[\overline{wos}]} = \alpha$，因之，我们可按 $A[wos]$ 与 $A[\overline{wos}]$ 之间的相似对应规则 f 以及在规则 f 下的相互对应关系，将 $A[\overline{wos}]$ 中所有序数给良序集 $A[wos]$ 中所有的元素相互对应地进行编号，从而由 $A[\overline{wos}]$ 为一自相矛盾的非集推知良序集 $A[wos]$ 也是一个自相矛盾的非集. 又由于 $A[wos]$ 不过是将 $A=\{x \mid P(x)\}$ 中所有元素重新编序而获得，故从集合的角度看，两者是同一个集合，从而不可数集合 $A=\{x \mid P(x)\}$ 为一自相矛盾的非集.

6.6 对角线方法中的“每一”与“所有”

在 2.1 节中，曾对运用对角线方法证明实数集合为不可数集合一事作过一些议论，但在传统观念框架下，也只能议论议论而已. 但在6.1 ～ 6.5 节的思维框架下，我们就能用严格的推理方式来论述这件事了.

如所知，在经典集合论中，运用对角线方法去证明实数集合 R 的势为不可数的过程如下：所用方法是反证法，亦即反设(0,1) 区间中的所有实数构成的集 R 具有可数势 ω(见 6.4.1 注释(Ⅱ) 中有 $N \upharpoonright \lambda \Rightarrow \approxeq^{\circ} = \omega$)，从而可用自然数给 R 的元素编号，或者说 R 与自然数集合 $N=\{x \mid x$ 为自然数$\}$ 之间可建立一一对应关系，如下表所示：

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
N & & R & & & & & & & & \\
\overbrace{1}, & \leftrightarrow & \overbrace{\theta_1}, & = & 0.\,p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} & \cdots & \\
2, & \leftrightarrow & \theta_2, & = & 0.\,p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} & \cdots & \\
3, & \leftrightarrow & \theta_3, & = & 0.\,p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots & p_{3n} & \cdots & \\
\vdots & & \vdots & & & & & \ddots & & & \\
n, & \leftrightarrow & \theta_n, & = & 0.\,p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} & \cdots & \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & \ddots &
\end{array}
$$

现构造一个实数

$$\theta = 0.p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \cdots$$

其中 $p_i = p_{ii} + 1$，当 $p_{ii} = 9$ 时，取 $p_i = 0$，在这里，$\theta \in (0,1)$，即 θ 为一实数是显然的，另一方面，θ 却与 R 中任一元 θ_m 相异，因为 θ 与 θ_m 有一个有穷差位 m，即 $p_m \neq p_{mm}$. 既然 $E\theta_m(\theta_m \in R \rightarrow \theta \neq \theta_m)$，从而在经典集合论中就等同于有 $\forall \theta_m(\theta_m \in R \rightarrow \theta \neq \theta_m)$. 因为若令 $E =_{df}$“每一”，$\forall =_{df}$“所有”，则根据全称量词 $\forall$ 的解释约定，在任何场合 E 与 $\forall$ 可以互相替换. 因此，$\theta \notin R$. 可见 R 并没有包括(0,1)中的全体实数，矛盾. 这说明反设(0,1)中全体实数所构成的集 R 具有可数势一事不成立，从而该实数集合 $R = \{x \mid x \in (0,1) \wedge x$ 为一实数$\}$ 具有不可数势 C.

然而我们将在下文中指出，当我们在经典集合论中引入弹性集合 $\mathcal{N} = \{x \mid n(x)\}$ 或柯西剧场 $C\mathcal{N}$ 以后，就会看出上文所论 R 具有不可数势 C 的证明过程是靠不住的. 因为在经典集合论中有所谓“相异实数有穷差位判别原则”，即设有二实数：

$$\theta = 0.p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \cdots$$
$$\theta' = 0.p'_1 p'_2 p'_3 \cdots p'_n \cdots$$

如果 $\theta \neq \theta'$，则必须 $\exists m(m < \omega \wedge p_m \neq p'_m)$，反之亦然. 亦即应有

$$\theta \neq \theta' \text{ iff } \exists m(m < \omega \wedge p_m \neq p'_m),$$

在这里，

$$\text{iff} =_{df} \text{“当且仅当”}.$$

试看上述运用对角线方法往证(0,1)中全体实数所构成的集 R 具有不可数势的过程，我们判定那个构造出来的实数

$$\theta = 0.p_1 p_2 p_3 \cdots p_n \cdots$$

与刚性集合

$$R = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n, \cdots\}$$

中任一实数

$$\theta_i = 0.p_{i1} p_{i2} p_{i3} \cdots p_{in} \cdots$$

为相异实数时，所用的有穷差位正好是第 i 位，即 $p_i \neq p_{ii}$，亦即

$$\theta \neq \theta_i \text{ iff } \exists i(i < \omega \wedge p_i \neq p_{ii}),$$

现任选 R 中两个实数 θ_i 与 θ_j，只要 $i \neq j$，那么“判定 θ 与 θ_i 相异时所用的差位位数 i”就不等于“判定 θ 与 θ_j 相异时所用的差位位数 j”. 从而我们有如下结论：

(*) 用以判定实数 θ 与 R 中的实数相异时所用的各个有穷差位是两两相异的.

亦即

$$\theta_i \neq \theta_j \text{ iff 差位 } i(\theta \neq \theta_i; p_i \neq p_{ii}) \neq \text{差位 } j(\theta \neq \theta_j; p_j \neq p_{jj}).$$

由于实数集合 $R=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots,\theta_n\cdots\}$ 中有 ω 个实数，从而所谓判定实数

$$\theta = 0.p_1p_2p_3\cdots p_n\cdots$$

与 R 中所有实数相异，就是要判定 θ 与 R 中之 ω 个实数全都相异. 那么根据上述结论(*)可知，必须要有 ω 个两两相异的有穷差位才能判定 θ 与 R 中之 ω 个实数全都相异. 实际上，在有穷差位判别原则前提下，运用上述对角线方法往证(0,1)中全体实数所构成之集 R 具有不可数势的过程中，应有如下结论：

(**)“判定实数 θ 与 R 中所设之 ω 个实数全都相异”iff“存在有 ω 个两两相异的有穷差位”.

现在我们只要在柯西剧场中举办一次专门接待上述“ω 个两两相异的有穷差位”的电影招待会，就会知道“存在有 ω 个两两相异的有穷差位”这一结论是不能成立的，如同我们在 6.5.2 中讨论柯西剧场现象时一样，亦就是甲、乙两位守门人所获致的共识：“存在有 ω 个两两相异的有穷序数”这一结论不能成立. 从而由上述结论(**)可知，在有穷差位判别原则前提下，运用对角线方法往证实数 θ 与实数集 R 中之 ω 个实数全都相异的证明过程不能成立.

在这里应注意，既然“存在有 ω 个两两相异的有穷差位”这一结论不能成立，那么由上述结论(**)即知“判定实数 θ 与 R 中所设 ω 个实数都相异”的结论也不成立. 从而“实数集合 R 中所有的实数都与 θ 有一个有穷差位”这一断言也不能成立. 然而反过来，对于实数集合 R 中的每一或任一实数而言，却与 θ 必定有一个有穷差位，这就是说，我们虽然有

$$\mathrm{E}\theta_i(\theta_i \in R \to \exists i(i<\omega \land p_i \neq p_{ii})),$$

但却不会有

$$\forall \theta_i(\theta_i \in R \to \exists i(i<\omega \land p_i \neq p_{ii})).$$

亦即若令谓词 P 表示：“R 中某个实数 θ_i 与实数 θ 有一个有穷差位 $i(p_{ii} \neq p_i)$”，则由上面的讨论可知下述

$$(\text{II})\ \mathrm{E}\theta_i(\theta_i \in R \to P(x)) \to \forall \theta_i(\theta_i \in R \to P(x))$$

并不成立. 然而下述

$$(\text{I})\ \forall \theta_i(\theta_i \in R \to P(x)) \Rightarrow \mathrm{E}\theta_i(\theta_i \in R \to P(x))$$

在任何场合总是成立的.

这就是说，虽然由所有 x 如何如何总能推出每一 x 如何如何，但是反过来，由每一 x 如何如何就未必总能推出所有 x 如何如何. 这个事实

说明，经典二值逻辑中认定"每一"等于"所有"(即 E = ∀)的思想规定，在兼容两种无穷观的分析方法中存在严重的局限性.

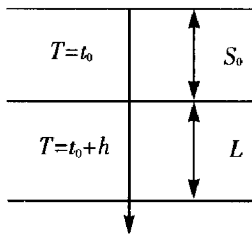
6.7 分析基础中的无穷观问题

在2.3节中，曾已论及由贝克莱(Berkeley)悖论所引发的数学第二次危机，以及由极限论的建立而使危机解除等内容，但在本节中将在兼容两种无穷观和 poi ≠ aci 的分析方法下，重新讨论数学第二次危机的问题. 又为便于读者一气呵成地阅读本节内容，我们不惜略有内容复述之嫌，在此仍将从 Berkeley 悖论讲起.

6.7.1 微积分与极限论的简要历史回顾

17世纪和整个18世纪，由于微积分理论的诞生及其在各个领域里的广泛应用，微积分理论得到了飞速的发展，然而当时的微积分理论却建立在含混不清的无穷小概念上，由于没有一个牢固的理论基础而遭到各方面的非难. 其中最为核心的非难可归结为著名的贝克莱悖论. 今以求取自由落体 t_0 时刻的瞬时速度为例说明如下.

大家都熟悉自由落体的距离公式 $S = \frac{1}{2}gt^2$，当 $t = t_0$ 时，下降距离为 $S_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$，当 $t = t_0 + h$ 时，下降距离为 $S_0 + L = \frac{1}{2}g(t_0 + h)^2$，这表明落体在 h 秒内所下降的距离为



$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 - S_0 \\
&= \frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 \\
&= \frac{1}{2}g(2t_0 + h)h
\end{aligned}
$$

从而落体在 h 秒内下落的平均速度为

$$
V = \frac{L}{h} = \frac{\frac{1}{2}g(2t_0 + h)h}{h} = gt_0 + \frac{1}{2}gh
$$

显然，当时间的间隙 h 越小时，平均速度就与 $t = t_0$ 时的点速度越接近，但不论 h 多么小，只要 $h \neq 0$，则平均速度就不等于 $t = t_0$ 时的点速

度，但当 $h=0$ 时，就已经没有距离的改变，从而 $V=\frac{L}{h}=gt_0+\frac{1}{2}gh$ 就变成了无意义的 $\frac{0}{0}$，也就无法求得 $t=t_0$ 时的点速度.

牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)也曾为要摆脱此困境而分别提出种种解释：

(a) 说 h 是无穷小，故 $h\neq 0$，从而 $\frac{L}{h}=\frac{\frac{1}{2}g(2t_0+h)h}{h}$ 有意义，并可化为 $\frac{L}{h}=gt_0+\frac{1}{2}gh$，但无穷小量 h 与大于 0 的有限量相比可以忽略不计，于是可将 $\frac{1}{2}gh$ 丢掉，使得 $gt_0+\frac{1}{2}gh$ 变为 gt_0，这就是落体在 $t=t_0$ 时的点速度，亦即 $V|_{t=t_0}=gt_0$.

(b) 又说 $\frac{L}{h}=\frac{\frac{1}{2}g(2t_0+h)h}{h}=gt_0+\frac{1}{2}gh$ 的最后比是 gt_0，这就是 $t=t_0$ 时的点速度.

(c) 说 $\frac{L}{h}=gt_0+\frac{1}{2}gh$ 的极限是 gt_0.

(d) 牛顿和莱布尼兹又解释说：当 $h\to 0$ 时，既不在 h 变为 0 之前，也不在 h 变为 0 之后，正好在 h 变为 0 时，$\frac{L}{h}=gt_0+\frac{1}{2}gh$ 的值是 gt_0.

以上种种说法，都不能使人们满意地认为已经解决了如下的矛盾：

$$*\begin{cases}(A)\ 为要使\frac{L}{h}有意义，必需\ h\neq 0;\\(B)\ 为要求得落体在\ t=t_0\ 时的点速度是\ gt_0，又必需\ h=0.\end{cases}$$

在同一个问题的求解过程中的同一个量 h，何以能既不等于 0，同时又等于 0 呢？这就是数学史上所说的贝克莱悖论.

莫里斯·克莱因(Morris Kline)在《古今数学思想》第一卷中指出：导数被当作 y 与 x 消失了的增量之比，即 dy 与 dx 之比，贝克莱说它们既不是有限量，也不是无穷小量，但也不是无，这些变化率只不过是消失了的量的鬼魂[18].

数学史上把 18 世纪微积分诞生以来在数学界出现的混乱局面称为数学的第二次危机.

基于如上的局面，就不能不迫使数学家们认真对待这个贝克莱悖论，借以解除数学的第二次危机，这就直接导致了微积分的柯西－外尔斯特拉斯(Cauchy-Weierstrass)时代，柯西详细而系统地发展了极限论.

戴德金(Dedekind)在实数论的基础上证明了极限论的基本定理，康托(Cantor)与外尔斯特拉斯都投入了为微积分奠定理论基础的工作，发展了 ε-N 和 ε-δ 方法，避开了实体无限小和实体无限大的概念的设想和使用，这就是今天的数学分析.

6.7.2 简记与注释

一组简记：在 6.1 节中，在引进简记符号之后给出了潜无限(poi)和实无限(aci)的描述性定义，并给出了简记符号"↑"、"丅"、"⊤̸"的名称和解读方式. 在这里，我们将根据本节的数学背景和具体模型，选取其中相适应的解读方式，并在此基础上再组合成一组简记及其解读方式(参阅 6.4.1 中相关内容)如下：

$a \uparrow b =_{df}$"变量 a 无限趋近于极限 b"，

$a \top b =_{df}$"变量 a 达到极限 b"，

$a \not\top b =_{df}$"变量 a 永远达不到极限 b"，

$a \uparrow b \wedge a \top b =_{df}$"变量 a 无限趋近于极限 b 并且达到极限 b"，

$a \uparrow b \wedge a \not\top b =_{df}$"变量 a 无限趋近于极限 b 并且永远达不到极限 b".

定义 1 如果我们有 $a \uparrow b \wedge a \top b$，则称变量 a 以实无限方式趋向极限 b(gone)；

定义 2 如果我们有 $a \uparrow b \wedge a \not\top b$，则称变量 a 以潜无限方式趋向极限 b(going).

对任意的变量 a，要么以实无限方式趋向它的极限 b，要么以潜无限方式趋向它的极限 b.

此外，极限表达式通常是指带有极限符号 Lim 的等式，有如：$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A(0,\omega)$，$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = A(0,\omega)$，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A(0,\omega)$ 等等，极限表达式中的两组变量是：$x \to x_0$ 和 $f(x) \to A$，特称位于极限符号下方的那组自变量 $x \to x_0$ 为第一变量，而称另一组应变量 $f(x) \to A$ 为第二变量.

一点注释：在这里，无论是 $a \uparrow b \wedge a \top b$ 还是 $a \uparrow b \wedge a \not\top b$，两者的共同之处在于都有 $a \uparrow b$. 两者的不相容之处在于完成式 $a \top b$(gone)和进行式 $a \not\top b$(going). 但在极限论中基于 ε-δ 和 ε-N 方法的相关极限的定义并不涉及和区分 $a \top b$ 和 $a \not\top b$ 一类概念，或者说统一立足于 $a \uparrow b$，亦即只考虑变量无限趋近于它的极限就可以了，至于 $a \top b$ 或 $a \not\top b$ 则不予过问，事实上，两种趋近于极限的方式都有一个共同点，即 $a \uparrow b$. 这对 ε-δ 和

ε-N 方法下的极限定义已经够了. **但现在我们却要在极限论中引入变量以实无限方式无限趋近于它的极限这一类观念，并明确区分变量趋向它的极限的实无限方式和潜无限方式.** 须知在极限论中探索和研究问题时，运用这种兼容潜无限和实无限的思维方式和分析方法，以及确认潜无限不等于实无限（poi $\neq$ aci）的思想规定，都是有其合理性根据的. 因为我们已在 6.2 中得到结论：兼容两种无穷观的思维方式和分析方法为近现代数学及其理论基础本身所固有，特别是为极限论自身所固有. 其次又在 6.3.2 中获有结论：潜无限不等于实无限（poi $\neq$ aci）的思想规定也是近现代数学及其理论基础自身所固有. 因此，在极限论中引入变量以实无限方式趋近于它的极限这一类概念，并明确区分变量趋向它的极限的实无限方式和潜无限方式等等，都不是人们外加到极限论中，而是其自身所固有的思维方式和分析方法.

6.7.3 关于极限表达式的可定义与可实现概念

通常对于极限表达式 $\mathrm{Lim}_{x\to x_0} f(x)=A$ 中的第一变量 $x\to x_0$ 而言，如果变量 x 以实无限方式趋向它的极限 x_0 将导致矛盾（亦即 $x\uparrow x_0\wedge x\top x_0\vdash B, \neg B$ 的话），则变量 x 就必须以潜无限方式趋向于它的极限 x_0（亦即必须是 $x\uparrow x_0\wedge x\not\top x_0$）.

例 1 对于极限表达式 $\mathrm{Lim}_{x\to 0}\frac{1}{x}=\omega$ 而言，如果 $x\uparrow 0\wedge x\top 0$，则必将导致矛盾，因为 $x\top 0$ 表明将会出现 $x=0$，但数学上规定 0 不能作为分母，所以 $x\top 0$ 表明函数 $\frac{1}{x}$ 将在最后走向无意义而不是 ω，事实上函数 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义. 总之极限表达式 $\mathrm{Lim}_{x\to 0}\frac{1}{x}=\omega$ 中的第一变量 $x\to 0$，其中变量 x 只能以潜无限方式趋向它的极限 0，亦即只有 $x\uparrow 0\wedge x\not\top 0$ 而不允许有 $x\uparrow 0\wedge x\top 0$.

例 2 对于极限表达式 $\mathrm{Lim}_{n\to\omega}\frac{1}{n}=0$ 中的第一变量 $n\to\omega$ 而言，如果出现 $n\uparrow\omega\wedge n\top\omega$，则表明将有 $n=\omega$ 的出现，但数学上规定所有的自然数都是有限序数，亦即 $\forall x(x\in N\to x<\omega)$，所以根本不允许有 $n=\omega$ 的出现. 为之极限表达式中的第一变量 $n\to\omega$，其中变量 n 必须以潜无限方式趋向它的极限 ω，亦即只有 $n\uparrow\omega\wedge n\not\top\omega$，不允许出现 $n\uparrow\omega\wedge n\top\omega$.

定义 3 设有极限表达式 $\mathrm{Lim}_{x\to x_0} f(x)=A$，$f(x)$ 在 x_0 处有定义，且满

足如下条件：

(ⅰ) $x \uparrow x_0 \wedge x \top x_0$，$f(x) \uparrow A \wedge f(x) \top A$，即 x 和 $f(x)$ 均以实无限方式趋近于它的极限；

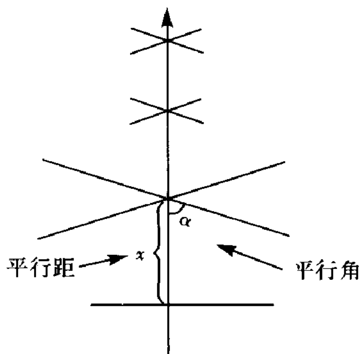
(ⅱ) $f(x) = A \text{ iff } x = x_0$.

则称该极限表达式是"既可定义且可实现的"，简称为可实现的，否则（例如：$x \uparrow x_0 \wedge x \top x_0 \vdash B, \neg B$ 等等）就称该极限表达式是"只可定义但不可实现的"，简称为不可实现的.

[△] **重要结论　任何一个可定义的极限表达式要么是可实现的，要么是不可实现的.**

关于可定义且可实现的极限表达式的例子有如：

例 3　Лобачевский 函数是 $[0, +\infty]$ 上的一个连续函数，并如下图所示：



其中 x 的长度叫做平行距，$\angle\alpha$ 叫做平行角，其中平行角 α 随着 x 的变大而变小，随着 x 的变小而变大，因此平行角 $\alpha = \pi(x)$ 是平行距 x 的函数，且有如下极限表达式：

$$\operatorname{Lim}_{x\to 0}\pi(x) = \frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Lim}_{x\to\infty}\pi(x) = 0 \qquad (*)$$

在上述极限表达式中，$\pi(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义，且满足条件：

(i) $x \uparrow 0 \wedge x \top 0$，$\pi(x) \uparrow \frac{\pi}{2} \wedge \pi(x) \top \frac{\pi}{2}$；

(ii) $\pi(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{iff} \quad x = 0$.

由定义知极限表达式 $\operatorname{Lim}_{x\to 0}\pi(x) = \frac{\pi}{2}$ 是可实现的.

例 4　设有极限表达式 $\operatorname{Lim}_{x\to 0} ax = a \operatorname{Lim}_{x\to 0} x = a \cdot 0 = 0$，其中函数 $f(x) = x$ 在 $x = 0$ 处有定义，且满足条件：

(ⅰ) $x \uparrow 0 \wedge x \top 0$, $f(x) \uparrow 0 \wedge f(x) \top 0$;

(ⅱ) $x = f(x) = 0$ iff $x = 0$.

所以该极限表达式是可实现的.

关于只可定义而不可实现的极限表达式的例子有如:

例 5 对于极限表达式$\mathrm{Lim}_{n \to \omega} n = \omega$而言,由于数学中明文规定 $\forall x(x \in N \to x < \omega)$,所以若设有 $n \uparrow \omega \wedge n \top \omega$,则必将出现 $n = \omega$ 而矛盾于 $n < \omega$ 的规定,所以只有 $n \uparrow \omega \wedge n \overline{\top} \omega$,所以该极限表达式是不可实现的.

例 6 对于极限表达式$\mathrm{Lim}_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = A$ 而言,由于数学上规定$\frac{0}{0}$没有意义,所以若设 $\Delta x \uparrow 0 \wedge \Delta x \top 0$ 和 $\Delta y \uparrow 0 \wedge \Delta y \top 0$,则将使$\mathrm{Lim}_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$走向无意义,所以该极限表达式也是不可实现的.

此外,前文所述例 1 和例 2 中的极限表达式$\mathrm{Lim}_{x \to 0} \frac{1}{x} = \omega$ 和$\mathrm{Lim}_{n \to \omega} \frac{1}{n} = 0$ 也都是不可实现的.

6.7.4 分析基础中的新贝克莱悖论

现在我们要重新审视一下当今极限论中如何求取自由落体在 $t = t_0$ 时的点速度的过程,如所知,这一过程最终由下述极限表达式解决问题:

$$\begin{aligned} V|_{t=t_0} &= \mathrm{Lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mathrm{Lim}_{\Delta t \to 0}(gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t) \\ &= gt_0 + \frac{1}{2}g\,\mathrm{Lim}_{\Delta t \to 0}\Delta t \\ &= gt_0 + \frac{1}{2}g \cdot 0 \\ &= gt_0 + 0 \\ &= gt_0. \end{aligned} \qquad (*)$$

应该说,在现有极限论所固有的思维方式下,亦即对于变量 a 和它的极限 b 之间的关系,有且仅有 $a \uparrow b$ 这层关系,特别是拒绝涉及和考虑 $a \top b$ 还是 $a \overline{\top} b$ 一类观念的情况下,上述求取 $t = t_0$ 时的点速度的极限表达式(*)确实可谓无可厚非,极限论是可以自圆其说的. 然而当我们在现有极限论中引入变量趋向它的极限的实无限方式和潜无限方式($a \uparrow b \wedge a \top b$ 和 $a \uparrow b \wedge a \overline{\top} b$)之后,将会出现新的异常情况,现讨论如下:

上述极限表达式(*)是由下述两个核心的极限表达式合成的:

(1) $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0$

(2) $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t=0$

而且极限表达式(1)和(2)中的第一变量 $\Delta t\to 0$ 是完全相同的，但由前文例6可知极限表达式(1)是不可实现的，因此必有 $\Delta t\uparrow 0\wedge\Delta t\not\top 0$，亦即变量 Δt 必按潜无限方式趋向它的极限0，又由前文例4可知上述极限表达式(2)是可实现的，因此必有 $\Delta t\uparrow 0\wedge\Delta t\top 0$，亦即变量 Δt 必按实无限方式趋向它的极限0，因此我们不禁要问：对于同一个问题的同一个求解过程中的同一个变量 $\Delta t\to 0$，为什么允许 $\Delta t\top 0$ 和 $\Delta t\not\top 0$ 同时出现？这岂不是为使 $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0$ 有意义，我们就说 $\Delta t\uparrow 0\wedge\Delta t\not\top 0$，即让 Δt 按潜无限方式趋向它的极限0；反之，为了使得 $\dfrac{1}{2}g\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t=\dfrac{1}{2}g\cdot 0$，我们又说 $\Delta t\uparrow 0\wedge\Delta t\top 0$，即让 Δt 按实无限方式趋向它的极限0，此等说理难以令人满意. 那么试问能否统一规定 Δt 以实无限方式趋向它的极限0？这是不可能的，因为这样一来必有 $\Delta t\top 0$，从而 $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0$ 将导致无意义的 $\dfrac{0}{0}$，那么能否统一规定 Δt 以潜无限方式趋向它的极限0？这也是不可能的，因为在 $\Delta t\uparrow 0\wedge\Delta t\not\top 0$ 的情况下，必然导致极限表达式 $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t=0$ 是不可实现的. 然而我们在前文例4中已知极限表达式 $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t=0$ 是可以实现的，又由前文重要结论[△]所示，任何一个极限表达式要么是可实现的，要么是不可实现的，亦即没有这样的极限表达式，它既是可实现的又是不可实现的. 极限表达式 $\operatorname*{Lim}\limits_{\Delta t\to 0}\Delta t=0$ 当然也不得例外. 总之，在极限论中明确引入变量趋向其极限的实无限方式和潜无限方式后，在上述求取自由落体在 $t=t_0$ 时的点速度的过程中，对于变量 Δt 趋向它的极限0的上述种种说法，都是说不通的.

以上的讨论表明，只要在极限论中明确引入和区分变量趋向它的极限的实无限方式和潜无限方式，那么贝克莱悖论的阴影并没有在极限论中真正消失.

6.2中已经明确指出，微积分与极限论本身就已采纳了兼容两种无穷观的思维方式，又6.3中明确指出：poi ≠ aci的思想规定亦为近现代数学系统自身所固有. 因之，我们在本节中采纳兼容两种无穷观的思维方式和poi ≠ aci的分析方法去讨论极限论中的问题，应该说是顺理成章之事. 相反地，在某个理论系统中，一方面为了自身的存在和发展而采纳兼

容两种无穷观的思维方式，另一方面，却为了掩盖矛盾又拒绝采纳兼容两种无穷观的思维方式去分析问题，则可谓太无道理.

6.8 非直接使用poi与aci观念下的自然数系统的不相容性

在6.4与6.5中所论之无穷集合矛盾性的证明过程中，都要直接涉及潜无限与实无限观念的使用.在本节中，将在不直接使用潜无限与实无限观念的情况下，给出自然数系统不相容性的证明，然而读者在看完相关证明之后，务必进一步阅读其后的“续论与说明”，以求其深层次的原因所在.

6.8.1 注释与简记

在这里，我们将对“自然数的个数”与“自然数的数值”这两个概念作些说明.由于对任何一个概念下定义，必需借助于一些比被定义概念更为广泛或基本的概念，如此倒推下去，总有一些概念，再也找不到比它更为基本或广泛的概念来定义它，从而只能自相地通过举例、说明或者譬如而描述之.对于“自然数的数值”这个概念，可以这样去理解，任何一个自然数总有一个名称，例如对于“3”这个自然数，中文称之曰“三”，英文则叫做“three”，如此等等.那么我们就把任何一个自然数的名称叫做这个“这个自然数的数值”.至于“自然数的个数”这个概念，只能这样去理解：面对一类对象或事物，我们总能对这类对象或事物进行点数或统计，并用某种数量来表示对它们进行点数或统计的结果.有如告诉人们说，这里有3个桃子、8个西瓜和1500个氢原子，如此等等.只是我们所面对的这类事物或对象不是别的，而是自然数集合$N=\{x\mid n(x)\}$内部的各个自然数，同样会有对它们进行各种各样点数或统计的结果，从而出现有“100个自然数”、“1000个自然数”、“无穷多个自然数”等.

在本节中，我们将用kc(n)(Count)表示对自然数序列λ中的自然数进行点数到n之后统计出来的“自然数的个数”，并用nv(n)(numerical value)来表示序列λ中第n个“自然数的数值”，并用符号[inf]来表示“无穷多个”等等，亦即我们规定：

kc(n) $=_{\text{def}}$ 对自然数序列λ中的自然数进行点数到n之后统

计出来的"自然数的个数"，

nv(n) $=_{\text{def}}$ 对自然数序列 λ 中第 n 个"自然数的数值"，

[fin] $=_{\text{def}}$"有限"；

[inf] $=_{\text{def}}$"无穷多"；

[¬ fin] $=_{\text{def}}$"非有限".

其实这里的 kc(n) 有点像集合论中的有穷或无穷集合的势或基数，而 nv(n) 有点像集合论中的有穷或无穷集合的序数. 但本节中却不使用基数或序数这类概念. 因为基数或序数概念的定义都是置身于集合之外加以定义的，例如，自然数集合 N 之势被表示为 $\overline{N}=\aleph_0$，又自然数序列 λ 之序数被表示为 $\overline{\overline{N}}=\omega$ 等等，由于我们在本节中将会强调置身于自然数集合 N 或自然数序列 λ 这个封闭世界内部做作业，因而作业者置身于这个封闭世界内部，所面对的除了一个一个的自然数之外什么也没有，根本感知不到 N 或 λ 作为全体自然数的整体的存在，所以我们只能另立 kc(n) 和 nv(n) 这样的表示方法，这就是本节中弃用 $\aleph_0$ 与 ω 一类符号的表示方法的原因.

6.8.2 恰由全体自然数构成之集合的不相容性证明

现在让我们来证明如下定理：

定理 恰由全体自然数构成的集合 $N=\{x \mid n(x)\}$（$n(x)=_{\text{def}}$"x 为一自然数"）是一个自相矛盾的非集.

证明 现将自然数集合 $N=\{x \mid n(x)\}$ 的一切元由小到大地排列为如下的自然数序列：

$$\lambda:\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

现在我们在自然数序列 λ 的内部做如下作业，其作业规则是：

（※） "由 1 开始，并且一个紧接着下一个地去数自然数的个数".

我们很快发现在此作业规则下，所数出来的自然数"个数"（即 kc(n)），总与那个被数及的自然数的"数值"（即 nv(n)）相同. 例如，数了 5 个自然数时，该自然数的数值恰好是 5，数了 1000 个自然数时，该自然数的数值正好是 1000，如果不怕麻烦，还可用数学归纳法来证明，在上述作业规则（※）之下，"个数"等于"数值"一事对所有数出来的自然数的"数值"总成立. 这就是说，由 6.8.1 中之注释与简记中所引进的符号 kc(n) 和 nv(n) 来表述，则我们可用数学归纳法证明：$\forall$ nv(n)(nv(n) = kc(n)). 现证明如下：

奠基 当 $\text{nv}(n) = 1$ 时，必有 $\text{kc}(n) = 1$.

归纳 若设数值 $\text{nv}(n) = m$ 时，有个数 $\text{kc}(n) = m$，则当数值 $\text{nv}(n) = m + 1$ 时，因为数值为 $\text{nv}(n) = m + 1$ 的那个自然数正好是紧邻在数值 $\text{nv}(n) = m$ 之后的那个自然数，所以由自然数 1 数到数值为 $\text{nv}(n) = m + 1$ 的那个自然数时，正好是在 $\text{kc}(n) = m$ 的基础上再加上 1 个自然数，亦即此时必有 $\text{kc}(n) = m + 1$.

故由数学归纳法知有如下结论：即对所有的自然数数值 $\text{nv}(n)$ 而言，$\text{kc}(n) = \text{nv}(n)$ 总成立. 亦即我们有如下重要结论：

$$(\bigtriangledown) \qquad \forall \text{nv}(n)(\text{nv}(n) = \text{kc}(n)),$$

但是我们有如下熟知定理：

定理 A 所有的自然数都是有限数，亦即所有的自然数的数值都是有限的，亦即我们有

$$\forall n(n \in N \rightarrow \text{nv}(n)[\text{fin}]).$$

因此，由上述定理 A 可知有

$$\forall \text{nv}(n)(\text{nv}(n)[\text{fin}]),$$

于是由等值置换公理和上文重要结论($\bigtriangledown$)可有

$$\forall \text{kc}(n)(\text{kc}(n)[\text{fin}]).$$

首先，由于我们是在非构造性数学框架内进行推理，我们能对自然数集合 N 或自然数序列 λ 内部的自然数全部点数完毕，或者说全部数一遍. 那么上述熟知定理 $\forall n(n \in N \rightarrow \text{nv}(n)[\text{fin}])$ 就在告诉我们，即使你将自然数集合 N 或自然数序列 λ 内部的自然数一个不漏地全部数完，也不可能出现 $\text{nv}(n)[\neg \text{fin}]$ 或 $\text{nv}(n)[\text{inf}]$ 的情况. 这表明如上之结论 $\forall \text{nv}(n)(\text{nv}(n)[\text{fin}])$ 在非构造性数学框架内的正确性与科学性是必然的.

其次，上文重要结论($\bigtriangledown$)是用数学归纳法证得的，数学归纳法能且只能用在所有数值有限的自然数上，从而此处将经由数学归纳法所证之上文重要结论($\bigtriangledown$)用到 $\text{nv}(n)[\text{fin}]$ 上也是有效的. 如此，由等值置换公理和重要结论($\bigtriangledown$)必有结论：$\forall \text{kc}(n)(\text{kc}(n)[\text{fin}])$ 为真. 从而就有

$$\neg \exists \text{kc}(n)(\text{kc}(n)[\text{inf}]) \text{ 或 } \neg \exists \text{kc}(n)(\text{kc}(n)[\neg \text{fin}]) \qquad (1)$$

但在另一方面我们却又有如下熟知定理：

定理 B 自然数集合 $N = \{x \mid n(x)\}$ 或自然数序列 λ 内部有无穷多个(即[inf]或[¬ fin])自然数.

定理 C 自然数集合 $N = \{x \mid n(x)\}$ 或自然数序列 λ 内部有无穷多个(即[inf]或[¬ fin])偶数.

定理D 自然数集合 $N=\{x\mid n(x)\}$ 或自然数序列 λ 内部有无穷多个(即[inf]或[¬fin])奇数.

定理E 自然数集合 $N=\{x\mid n(x)\}$ 或自然数序列 λ 内部有无穷多个(即[inf]或[¬fin])质数.

故由上述定理B、C、D、E可有结论：$\exists$kc(n)(kc(n)[inf]). 否则若反设¬$\exists$kc(n)(kc(n)[inf])，则必有 $\forall$kc(n)(kc(n)[fin])，从而与上述定理B、C、D、E中的任何一个都矛盾，故反设¬$\exists$kc(n)(kc(n)[inf])不成立. 从而我们有

$$\exists \text{kc}(n)(\text{kc}(n)[\text{inf}]) \text{ 或 } \exists \text{kc}(n)(\text{kc}(n)[\neg \text{fin}]) \qquad (2)$$

如上之(1)和(2)相互矛盾. 因此恰由全体自然数构成的集合 $N=\{x\mid n(x)\}$ 是一个自相矛盾的非集，或者说自然数集合 $N=\{x\mid n(x)\}$ 这个概念是一个自相矛盾的错误概念. 正如莱布尼茨所指出的："所有整数的个数，这一提法自相矛盾，应该抛弃."[76,396]

6.8.3 续论与说明

一点说明：6.8.2中所论及之nv(n)和kc(n)都是变量，作为变量本身，两者都是[¬fin]，因为nv(n)可以无止境增大，kc(n)可以无止境地增多. 因此，6.8.2中所涉及的某些公式中的nv(n)或kc(n)就不是变量本身，而是变量所涉及之论域中的个体. 例如就公式¬$\exists$nv(n)(nv(n)[¬fin])中的nv(n)而言，指的是在熟知定理 $\forall n(n\in N\to$ nv(n)[fin])的结论之下，即使你对 N 或 λ 内部的自然数一个不漏地全部搜索一遍，亦不可能搜索到一个nv(n)[¬fin]的个体. 又如公式 $\exists$kc(n)(kc(n) = 1000)或 $\exists$kc(n)(kc(n)[¬fin])中的kc(n)而言，指的是存在着这样一个kc(n)等于1000，或者存在着这样一个kc(n)等于[inf]. 例如，我们在 N 或 λ 内部先把偶数点数完毕就不再数下去，则根据熟知定理："N 或 λ 内部有[inf]个偶数"的结论，就知道存在着这样一个kc(n)等于[inf]，至少存在着某个[¬fin]的kc(n).

一点续论：本节中关于自然数系统的不相容性证明过程，从表面上看没有直接使用潜无限和实无限观念，但就证明过程的内涵深处而言，仍然是一个潜无限与实无限不可混淆的问题. 试看自然数序列 λ、自然数数值序列 λnv(n)和自然数个数序列 λkc(n)，在非构造性数学框架内，这三个序列不仅相互一一对应，而且都是完成了的实无限可数序列，如下所示：

$$
\begin{array}{cccccc}
\lambda: & \{1, & 2, & \cdots, & n, & \cdots\} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\lambda\, kc(n): & \{kc(n)=1, & kc(n)=2, & \cdots, & kc(n)=n, & \cdots\} \\
 & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
\lambda\, nv(n): & \{nv(n)=1, & nv(n)=2, & \cdots, & nv(n)=n, & \cdots\}
\end{array}
$$

首先分析一下 $\lambda nv(n)$，由于 $nv(n)$ 可以无限增大，从而已经有了通向[inf]的可能性。但在熟知定理 $\forall n(n \in N \to nv(n)[fin])$ 的结论下，使得在 $nv(n)$ 无止境地增大的进程中，严格要求永远保持 $nv(n)[fin]$，根据 6.5.1 和 6.5.2 中的相关讨论可知，$\lambda nv(n)$ 根本不可能是什么完成了的实无限序列，而是一个标准的潜无限弹性序列：

$$\lambda nv(n):\{nv(n)=1, nv(n)=2, \cdots, \overrightarrow{nv(n)=n}\}.$$

其次再分析一下 $\lambda kc(n)$，由于 $\lambda kc(n)$ 可以无止境地增多，同样有了通向[inf]的可能性，又由于熟知定理："N 或 λ 内部有[inf]个自然数"的结论而知，在 $kc(n)$ 无止境地增多的过程中，一定要多达[inf]. 从而这是一个标准的 Cantor Zermelo 意义下的实无限序列：

$$\lambda kc(n):\{kc(n)=1, kc(n)=2, \cdots, kc(n)=n, \cdots\},$$

因此，同样一个自然数系统，从 $nv(n)$ 角度看，它是一个潜无限弹性集合 $A=\{x \mid n(x)\}=\{1,2,\cdots,\vec{n}\}$，又从 $kc(n)$ 角度看，它又是一个 Cantor Zermelo 意义下的实无限刚性集合 $N=\{x \mid n(x)\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 根据由 6.3.2 的相关讨论，可知在近现代数学及其理论基础中，不仅潜无限不等于实无限($poi \neq aci$)，而且满足排中律 $\vdash A \vee \neg A$，从而自然数系统的不相容性是无可置疑的. 在 6.8.2 对自然数系统不相容性证明过程中，只是将 $\lambda nv(n)$ 的潜无限性用 $\forall nv(n)(nv(n)[fin])$ 或 $\neg \exists nv(n)(nv(n)[\neg fin])$ 的形式表达出来，又将 $\lambda kc(n)$ 的实无限性用 $\neg \forall kc(n)(kc(n)[fin])$ 或 $\exists kc(n)(kc(n)[inf])$ 的形式体现出来. 再由 $\forall nv(n)(nv(n)=kc(n))$ 和等值置换公理而将其转换为直接的矛盾形式并由此而揭示自然数系统的不相容性.

解决矛盾的方法可有如下两种方案：

其一是否定熟知定理："N 或 λ 内部有[inf]个自然数"的结论，使得 $kc(n)$ 在无止境地增多的同时也永远保持 $kc(n)[fin]$，从而 $\lambda kc(n)$ 也成为潜无限弹性序列：

$$\lambda kc(n):\{kc(n)=1, kc(n)=2, \cdots, \overrightarrow{kc(n)=n}\},$$

这样一来再没有 Cantor-Zermelo 意义下的实无限自然数集合 $N = \{x \mid n(x)\} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，而只有潜无限弹性自然数集合 $\mathcal{N} = \{x \mid n(x)\} = \{1, 2, \cdots, \dot{n}\}$.

其二是否定熟知定理 $\forall n(n \in N \rightarrow \mathrm{nv}(n)[\mathrm{fin}])$ 的结论，承认 $\lambda\mathrm{nv}(n)$ 中也有 $\mathrm{nv}(n)[\mathrm{inf}]$ 的自然数，而使得 $\lambda\mathrm{nv}(n)$ 变为完成了的实无限序列：

$$\lambda\mathrm{nv}(n): \{\mathrm{nv}(n) = 1, \mathrm{nv}(n) = 2, \cdots, \mathrm{nv}(n) = n, \cdots, \mathrm{nv}(n)[\mathrm{inf}]\},$$

但这又与近现代数学及基础理论中的自然数序列：

$$\lambda: \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}\omega$$

的记法相悖. 总之，两种解决矛盾的方案都要涉及对近现代公理集合论的适当修正.

顺便指出，如果我们承认在 N 或 λ 内部 $\exists \mathrm{nv}(n)(\mathrm{nv}(n)[\mathrm{inf}])$，则势必有悖于近现代数学系统所认定的自然数集合 $N = \{x \mid n(x)\}$ 或自然数序列：

$$\lambda: \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}\omega$$

的记法、内涵和结构. 并出现有如：

$$\lambda\mathrm{nv}(n): \{\mathrm{nv}(n) = 1, \mathrm{nv}(n) = 2, \cdots, \mathrm{nv}(n) = n, \cdots, \mathrm{nv}(n)[\mathrm{inf}]\}$$

一类不为近现代数学系统所承认的事物. 因之在近现代数学框架内绝不允许出现 $\exists \mathrm{nv}(n)(\mathrm{nv}(n)[\mathrm{inf}])$ 一类公式. 但在另一方面，我们确认 N 或 λ 内部 $\exists \mathrm{kc}(n)(\mathrm{kc}(n)[\mathrm{inf}])$ 一事，则与近现代数学框架完全吻合，没有对自然系统的内涵、结构或记法造成任何缺损，如下所示：

$$\lambda_1: \{\underbrace{1, 2, \cdots, n, \cdots}_{\exists \mathrm{kc}(n)(\mathrm{kc}(n)[\mathrm{inf}])}\}$$

$$\lambda_2: \{\underbrace{2, 4, \cdots, 2n, \cdots}_{\exists \mathrm{kc}(n)(\mathrm{kc}(n)[\mathrm{inf}])}, \underbrace{1, 3, \cdots, 2n+1, \cdots}_{\exists \mathrm{kc}(n)(\mathrm{kc}(n)[\mathrm{inf}])}\}$$

如此等等，从形象到内涵结构，丝毫没有涉及自然数系统的修正或更动，从而在近现代数学框架内出现有如 $\exists \mathrm{kc}(n)(\mathrm{kc}(n)[\mathrm{inf}])$ 一类公式是顺理成章的事.

第 7 章　潜无限数学系统与重建实无限数学系统的构想

下文 7.1 ～ 7.4 将给出潜无穷数学系统的逻辑基础与集合论基础. 而 7.5 与 7.6 讨论完成式的实无限刚性集合结构，以及实无限集合与模糊谓词之间的关系.

本书第 6 章的内容，归纳起来，主要论述了如下几个问题：

(1) 近现代数学及其理论基础对两种无穷的兼容性，不仅在整体上兼容了潜无限和实无限，而且其中涉及无穷观的那些子系统也都是兼容两种无穷的.

(2) 讨论了近现代数学系统中之互相矛盾的一些隐性思想规定，具体地说，近现代数学及其理论基础中的某些逻辑或非逻辑公理隐性地贯彻了潜无限等于实无限的思想规定，而另一些逻辑或非逻辑公理则隐性地贯彻了潜无限不等于实无限的思想规定.

由上述(1) 和(2) 可知，兼容两种无穷的分析方法和潜无限不等于实无限的思想规定为近现代数学系统自身所固有，不仅不是人们外加到系统中去的，而且也为我们提供了在近现代数学框架下运用这样的分析方法与思想规定去分析问题的可行性依据.

(3) 证明了近现代数学中任何无穷集合 $A = \{x \mid P(x)\}$ 概念都是自相矛盾的错误概念.

(4) 证明了 Berkeley 悖论的阴影并没有在极限论中真正消失.

(5) 运用对角线方法往证实数集合为不可数集合的证明过程是无效的.

从而我们将直接面对并亟待解决两个问题：其一是如何为近现代数学和计算机科学理论重新选择一个合适的理论基础；其二是在什么解读方式下，能以全面保存近现代数学与计算机科学理论的所有研究成果. 本章所构建的潜无限数学系统，就是针对以上所说的两个必须面对的问题所做的努力. 当然，在 7.1 中，将明确指出，这里所说的潜无限数学系统完全不同于直觉主义的构造性数学系统.

7.1 潜无限数学系统(I)—— 预备知识

7.1.1 预备知识之一 —— 背景世界的划分原则

现让我们引进如下一组记号，用以表示有穷与无穷的背景世界：

(1) $\Omega_F(R;x)$ 表示有穷背景世界；

(2) $\Omega_P(R;x)$ 表示潜无穷背景世界；

(3) $\Omega_A(R;x)$ 表示实无穷背景世界.

其中，F 表示有穷(finite)，P 表示潜无穷(potential infinite)，A 表示实无穷(actual infinite). 而后面括号中的 R 和 x 表示各自背景世界中所拥有的谓词和研究对象.

从历史的角度看，由于实无限论者与潜无限论者一直是在互相否定的模式中争论不休，从而都认为两种无穷是不可兼容的. 因此，他们都坚持背景世界二分法原则，亦即实无限论者认为，背景世界要么有限，要么实无限，而潜无限论者则认为背景世界要么有限，要么潜无限，若用符号表达式，则可表示为

$$\text{背景世界的实无限二分法原则：} \vdash \Omega_F \vee \Omega_A,$$

$$\text{背景世界的潜无限二分法原则：} \vdash \Omega_F \vee \Omega_P.$$

在本书中，我们把背景世界的实无限二分法原则简称为二分法原则(Ⅰ)，而将背景世界的潜无限二分法原则简称为二分法原则(Ⅱ)，亦即我们有：

$$\text{二分法原则(Ⅰ)：} \vdash \Omega_F \vee \Omega_A,$$

$$\text{二分法原则(Ⅱ)：} \vdash \Omega_F \vee \Omega_P.$$

但从认识论的角度看，由于认识论中有一条世所公认的普遍原则，这就是：任何事物或观念的存在，都必定有它的背景世界. 反之，没有背景世界的事物或观念必定是无根基的，而无根基的事物或观念是不会长久存在和发展的. 那么，既然两种无穷观的萌芽、确立和争执的由来已是如此之久，所涉及的研究领域又是如此之广，我们就有理由相信，两种无穷观都有它自身的强有力的背景世界. 这种背景世界无论是客观实际的反映，还是人类智慧的合理外推，或者无论是现实事物的某种装配，还是哲理性的探索，都将是合情合理和毋庸置疑的. 另一方面，世界上凡是合理的东西都会长久存在且有它的背景世界，反之，凡有背景世界又能长

久存在和发展的事物或观念，就肯定有它的合理性. 那么潜无限与实无限这两种无穷观虽然互不相同，但都已千古存在又发展至今，因而都有它自身的合理性. 在这里，人人都会认同的一点是：凡是合理的东西都应给它以存在和发展的空间，切不可全盘否定. 不仅如此，大凡世界上合理的东西都是可以互相宽容的，从而它们是可以在同一空间中并存且共同发展的. 因此，两种无穷观就既不要在全盘否定另一种无穷观的方式下去寻求自身的存在和发展，也不要在排斥或吞并另一种无穷观的背景世界的前提下去刻画自身的存在和发展. 为之，我们主张承认两种无穷的兼容性，亦即主张确立一种有穷与无穷的背景世界三分法原则，这就是无条件承认背景世界要么有穷，要么潜无穷，要么实无穷. 该原则也可用如下的符号表达式表示出来：

$$\vdash \Omega_F \vee \Omega_P \vee \Omega_A.$$

在本文中也将有穷与无穷的背景世界三分法原则简称为三分法原则，亦即我们有：

$$\text{三分法原则：} \vdash \Omega_F \vee \Omega_P \vee \Omega_A.$$

7.1.2 预备知识之二——关于构建潜无穷数学系统的几点说明

在 7.1.1 中，我们讨论了有穷与无穷背景世界的二分法原则和三分法原则. 按照这些原则的本质内涵，如果一个理论系统是以贯彻三分法原则的精神建立起来的，则在该系统内必然兼容潜无限与实无限. 又若是以贯彻二分法原则（Ⅰ）或（Ⅱ）的精神建立起来的，则在该系统内必不能兼容两种无穷. 如果着眼于数学历史发展的角度，直觉主义学派的构造性数学系统，应该是在贯彻二分法原则（Ⅱ）的精神之下建立起来的，因为在构造性数学系统内，可谓真正做到了完全排斥实无穷观念. 只是在“存在必须（有穷步骤内）可构造”的严格要求下，限制过大，损失的合理内容太多，以致不为大多数数学家所欢迎，其自身的发展也很有限. 此外，从康托（Cantor）的古典集合论到策梅罗（Zermelo）的近代公理集合论，都十分强调实无限，从表面上看，似乎是以贯彻二分法原则（Ⅰ）的精神构建起来的. 然而事实上并没有能在系统内完全排斥潜无限，相关内容的详细讨论见 6.2 节. 又由 6.3 ～ 6.8 节知，近现代数学的逻辑基础与集合论基础中尚有一些深层次的矛盾. 因此，如何为近现代数学与计算机科学选择一个合适的理论基础？又在什么解读方式下能全面保存近现代数学与计算机科学的研究成果？这是我们必须面对并且亟待解决

的根本问题.在下文中,我们即将构建的潜无穷数学系统,就是针对如上必需面对的问题所作的努力.现将所说的潜无穷数学系统简记为PIMS.在PIMS中,我们仍将采用经典二值逻辑演算作为推理工具,但也必须作出适当的修正.而且PIMS中的那些构造集合与集合存在性的非逻辑公理,也将在近代公理集合论中的非逻辑公理基础上,逐一进行修正和重新解释.在某种意义上说,PIMS也可谓被修正了的近代公理集合论系统.毫无疑问,PIMS是以贯彻二分法原则(Ⅱ)的精神构建的,从而在PIMS中,将完全彻底地贯彻潜无限而不兼容实无限观念.为此,人们不禁会问,如此这般地构建出来的PIMS,会不会是直觉主义构造性数学的翻版?我们的回答是否定的(请参阅本书6.4.4中相关内容).两者的根本区别在于:(1)直觉主义构造性数学的配套逻辑工具是直觉主义逻辑(见本书4.2),而PIMS的推理工具却是修正了的经典二值逻辑演算.(2)直觉主义构造性数学的出发点不是任何意义下的集合论,而是布劳威尔对象对偶直觉意义下的自然数论(见本书4.2节).(3)直觉主义构造性分析学奠基于布劳威尔展形连续统(见本书4.2节),而PIMS的分析学将在弹性自然数系统的弹性幂集基础上展开.总之,两者各有各的出发点,各有各的建设方案,两者的内涵丰富程度也会大不相同.

最后还应指出,在数学的历史发展中,尚未见有明确以贯彻三分法原则精神构建并能自圆其说的数学系统.其实构建这种兼容两种无穷观的数学系统,将是一项较为艰巨的工程,但却是我们应予努力追求和实现的一个目标.

7.2 潜无限数学系统(Ⅱ)—— 逻辑基础之形式系统

我们在7.1中曾规定潜无限数学系统简记为PIMS,并明确指出:PIMS的逻辑推理工具仍将采用经典二值逻辑演算,但要作适当的修正.因为大家都比较熟悉经典二值逻辑演算系统的框架,故在给出PIMS的逻辑演算(即修正了的二值逻辑演算)系统时,除了修正之处作适当阐明之外,其余相关内容,仅对自然推理系统的形式语言符号库和合式公式形成规则,以及推理规则加以罗列,不再作任何相关的文字说明.其实,所谓对经典二值逻辑演算系统作适当修正,不过是在谓词逻辑中去消全称量词引入律(∀+)和增加一个名称为枚举量词及其解释约定而已.

7.2.1 PIMS 命题逻辑的自然推理系统 P^{PIN}

(一) 形式语言 L_{pia} 的基本符号:

(1) 命题联结词:¬、→、∧、∨、↔;

(2) 命题词:p_1、q_1、r_1、…、p_i、q_i、r_i,此处 $i = 1,2,\cdots,\tilde{n}$;

(3) 技术符号:(、).

我们常用 p、q、r 来表示任一命题词,用大写字母 A、B、C 来表示任一合式公式.

在这里应注意,$\{1,2,\cdots,\tilde{n}\}$即表示 6.5.1 和 6.5.2 中之潜无限弹性集合 $A = \{x \mid n(x)\}$. 在 PIMS 系统中,凡此类似情况以及有如用$\{1,2,\cdots,\tilde{n}\}$作为下标集$\{a_1,a_2,\cdots,a_{\tilde{n}}\}$或者序列 $a_1,a_2,\cdots,a_{\tilde{n}}$ 均作此理解.亦即均为潜无限弹性集合或潜无限弹性序列,简称潜序列.

(二)L_{pia} 中的合式公式(Wff)的形成规则:

(1) 单独一个命题词是 L_{pia} 的 Wff;

(2)A 是 L_{pia} 的 Wff⇒(¬A) 是 L_{pia} Wff;

(3)A、B 都是 L_{pia} Wff⇒$(A \to B)$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \leftrightarrow B)$ 都是 L_{pia} Wff;

(4) 归纳定义:L_{pia} 的一个公式 A 是 L_{pia} Wff iff$A$ 由 L_{pia} 的 Wff 的形成规则生成.

我们将用符号 Σ、Γ、Δ 等表示任意的公式集,即 P^{PIN} 系统公式集的元变项.

(三)P^{PIN} 中配套于 L_{pia} 的推理规则:

(Ref)$A \vdash A$,

$(\tau)\Gamma \vdash \Delta, \Delta \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A$,

$(\neg)\Gamma, \neg A \vdash B, \neg B \Rightarrow \Gamma \vdash A$,

$(\to_-)A \to B, A \vdash B$,

$(\to_+)\Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash A \to B$,

$(\wedge_-)A \wedge B \vdash A, B$,

$(\wedge_+)A, B \vdash A \wedge B$,

$(\vee_-)A \vdash C, B \vdash C \Rightarrow A \vee B \vdash C$,

$(\vee_+)A \vdash A \vee B, B \vee A$,

$(\leftrightarrow_-)$ $A \leftrightarrow B, A \vdash B$

$A \leftrightarrow B, B \vdash A$

$(\leftrightarrow_+)\Gamma, A \vdash B, \Gamma, B \vdash A \Rightarrow \Gamma \vdash A \leftrightarrow B$.

为了方便，我们将公式集 $\Sigma = \{A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n\}$ 直接写成公式序列的形式：$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n$. 当然，因为 Σ 是集，所以序列中的公式的次序是没有关系的. 这样，$\{A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n\} \vdash B$、$\Sigma \cup \{A\} \vdash B$、$\Sigma \cup \Sigma' \vdash B$ 可以分别表示为：$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n \vdash B$、$\Sigma, A \vdash B$、$\Sigma, \Sigma' \vdash B$.

将 $\Sigma \vdash A_1, \cdots, \Sigma \vdash A_n$ 简记为 $\Sigma \vdash A_1, \cdots, A_n$.

定义 7.1 公式 A 在命题逻辑 P^{PIN} 中由公式集 Σ 形式可推演（符号记为 $\Sigma \vdash A$），当且仅当 $\Sigma \vdash A$ 能由有限次使用推理规则而生成.

如果 $\Sigma \vdash A$，则称公式 A 是 Σ 的语法后承.

注意：符号 $\vdash$ 表示的是可推演关系，它不是形式语言中的符号，$\Sigma \vdash A$ 不是形式语言中的公式，它是表示公式集 Σ 和公式 A 之间关系的一个元语言符号.

定义 7.2 如果公式 A 由 $\varnothing$ 形式可推演，则称公式 A 是可证明的. 由 $\varnothing$ 到 A 形式可推演的一个公式序列称为公式 A 的一个证明. 如果公式 A 是可证明的，则称公式 A 为 P^{PIN} 系统的定理，符号记为 $\vdash A$.

定理 7.1 如果 $\Sigma \vdash A$，则存在有限集 Σ^*，$\Sigma^* \subseteq \Sigma$（$\Sigma^* \stackrel{\leftarrow}{\subseteq} \Sigma$）①，使得 $\Sigma^* \vdash A$.

（四）P^{PIN} 语义：

定义 7.3 一个真值赋值 v 是以包含每一公式的集为定义域、以 $\{0, 1\}$ 为值域的一个函数，并满足下列条件：

(1) $v(\neg A) = 1$，当且仅当，$v(A) = 0$；

(2) $v(A \rightarrow B) = 1$，当且仅当，$v(A) = 0$ 或者 $v(B) = 1$；

(3) $v(A \vee B) = 1$，当且仅当，$v(A) = 1$ 或者 $v(B) = 1$；

(4) $v(A \wedge B) = 1$，当且仅当，$v(A) = 1$ 并且 $v(B) = 1$；

(5) $v(A \leftrightarrow B) = 1$，当且仅当，"如果 $v(A) = 1$，则 $v(B) = 1$" 并且 "如果 $v(B) = 1$，则 $v(A) = 1$".

定义 7.4 设 Σ 是公式集，A 是公式. 如果存在赋值 v，使得 $v(A) = 1$，则称公式 A 是可满足的；$v(\Sigma) = 1$ 当且仅当对于任何公式 C，如果 $C \in \Sigma$，则 $v(C) = 1$；如果存在赋值 v，使得 $v(\Sigma) = 1$，则称公式集 Σ 是可满足的；赋值 v 满足公式 A 或公式集 Σ，也称 v 是公式 A 或公式集 Σ 的 P^{PIN}

① 在此，我们引入表示集合 Σ 与其子集 Σ^* 之间关系的符号. 当 Σ 是一个有穷集合时，集合 Σ 与其子集 Σ^* 之间的关系符号表示为 $\Sigma^* \subseteq \Sigma$；当 Σ 是一个潜无限弹性集合时，集合 Σ 与其子集 Σ^* 之间的关系符号表示为 $\Sigma^* \stackrel{\leftarrow}{\subseteq} \Sigma$. 详细论述请见 7.1：潜无限数学系统（Ⅳ）—— 集合论基础. 下同.

模型.

定义 7.5 设 Σ 是公式集，A 是公式. A 是 Σ 的语义后承，记作

$$\Sigma \models A$$

当且仅当对于任何赋值 v，如果 $v(\Sigma)=1$，则 $v(A)=1$.

定义 7.6 一个命题逻辑公式 A 称之为有效式当且仅当对于任何赋值 v，都有 $v(A)=1$；一个命题逻辑公式 A 称之为矛盾式当且仅当对于任何赋值 v，都有 $v(A)=0$.

命题逻辑有效式有时也被称为重言式. 简记为 $\models A$.

在 P^{PIN} 中可以证明：

定理 7.2 可靠性定理

(1) 如果 $\Sigma\vdash A$，那么 $\Sigma\models A$；

(2) 如果 $\vdash A$，那么 $\models A$.

定理 7.3 完全性定理

(1) 如果 $\Sigma\models A$，那么 $\Sigma\vdash A$；

(2) 如果 $\models A$，那么 $\vdash A$.

即 P^{PIN} 推理系统具有可靠性和完全性.

7.2.2 PIMS 谓词逻辑的自然推理系统 F^{PIN}

1. 形式语言 L_{pie} 的基本符号

在 L_{pie} 的符号库中，首先要保留 $L_{\text{p,a}}$ 中的基本符号，即 5 个命题联结词$\neg$、$\rightarrow$、$\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$ 和命题词 p_1、q_1、r_1、…、p_i、q_i、r_i(此处 $i=1,2,\cdots,n$)，还有技术符号(、)等，其次还要添加下述几类基本符号：

(1) 量词：$\forall$、$\exists$、E，

(2) 个体词：a_1、a_2、…、a_n，

(3) 谓词：F_1、G_1、H_1、…、F_n、G_n、H_n，

(4) 约束变元：x_1、y_1、z_1、…、x_n、y_n、z_n，

(5) 技术符号：,、(、).

显然 L_{pie} 的符号库是 L_{pn} 的符号库的真扩张.

我们常用 a、b、c 来表示任一个体词，常用大写字母 F、G、H 来表示任一谓词，常用 x、y、z 来表示任一约束变元.

量词 $\forall$ 的名称是全称量词，解释并读为“所有”或“一切”，形式符号 $\forall$ 该由英文单字 All 演变而来.

量词 E 的名称是枚举量词，解释并读为“每一”或“任一”，形式符号

E 该由英文单字 every 演变而来.

在 PIMS 的逻辑演算中，全称量词 ∀ 不得解释和读为"每一"，而枚举量词 E 不可解释并读为"所有". 两者被严格区分，这是对经典二值逻辑演算中关于量词解释约定的一种修正.

在 6.1 节中，曾明确定义了"枚举手续"这一概念，对任一非有限的枚举手续而言，如果该无止境的枚举手续没有进行完毕，即尚未穷举该枚举手续之前，则它所面对和指称的必为永远是现在进行式(going) 的潜无限，但若已将该枚举手续进行完毕，即已穷举了该枚举手续，则它所面对和指称的必为完成式(gone) 的实无限，所以由枚举到穷举的转换，就是进行式(going) 到完成式(gone) 的转换，也是由潜无限到实无限的转换.

在 6.1 节中关于枚举手续之例 2 的讨论，以及 PIMS 的逻辑演算中关于量词解释的约定可知，全称量词 ∀ 解释约定中的"所有"或"一切"所面对和指称的是完成式(gone)，而枚举量词 E 解释约定中的"每一"或"任一"所面对和指称的是现在进行式(going).

另一方面，由于 PIMS 以贯彻二分法原则(Ⅱ) 的精神构建的，故在 PIMS 中，要么有限，要么潜无限，决不兼容实无限观念，而潜无限必为永远是现在进行式(going)，而有限则必能在有穷步骤内穷举或进行完毕，故在有穷背景世界中，完成式(gone) 是最根本的. 故由上文所论，既然全称量词 ∀ 之解释约定中的"所有"或"一切"所面对和指称的是完成式(gone)，所以全称量词 ∀ 在 PIMS 中应属于有穷背景世界 Ω_F，而不属于潜无限背景世界 Ω_P，反之，枚举量词 E 之解释约定中的"每一"或"任一"所面对的既然是现在进行式(going)，所以枚举量词 E 在 PIMS 中必定属于潜无限背景世界 Ω_P，而不属于有穷背景世界 Ω_F. 如上所论，也可采用如下的简记表述如下：

$$\text{PIMS}\begin{cases} E \in \Omega_P, \\ \forall \in \Omega_F. \end{cases}$$

量词 ∃ 的名称是存在量词，解释并读为"存在"或"有"，形式符号 ∃ 该是英文单字 Exist 演变而来.

2. 形式语言 L_{pie} 中之合式公式(Wff) 的形成规则

(1) 单独一个命题词是 L_{pie} Wff；

(2) 若 F_n 是一 n 元谓词，$a_1, \cdots, a_n$ 是任意 n 个个体词，则 $F_n(a_1, \cdots, a_n)$ 是 L_{pie} Wff；

(3) A 是 L_{pia} 的 Wff ⇒(¬A) 是 L_{pia} Wff；

(4) A、B 都是 L_{pia}Wff$\Rightarrow(A\rightarrow B)$、$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\leftrightarrow B)$ 都是 L_{pia}Wff;

(5) $G(a)$ 是 L_{pie}Wff,a 在其中出现,x 不在其中出现 $\Rightarrow\forall xG(x)$、$ExG(x)$、$\exists xG(x)$ 都是 L_{pie}Wff;

(6) 归纳定义:L_{pie} 的一个公式 A 是 L_{pie}Wff iff A 由 L_{pie} 的 Wff 的形成规则生成.

我们将用符号 Σ、Γ、Δ 等表示任意的公式集,即 P^{PIN} 系统公式集的元变项.

3. F^{PIN} 中配套于 L_{pie} 的推理规则

在 F^{PIN} 配套于 L_{pie} 的推理规则中,首先要保留 P^{PIN} 中配套于 L_{pia} 的全部推理规则,即有(Ref)、(τ)、$(\neg)$、$(\rightarrow_-)$、$(\rightarrow_+)$、$(\wedge_-)$、$(\wedge_+)$、$(\vee_-)$、$(\vee_+)$、$(\leftrightarrow_-)$、$(\leftrightarrow_+)$. 其次还要添加如下的推理规则:

$(\forall_-)$ $\forall xA(x)\vdash A(a)$,

(E_-) $ExA(x)\vdash A(a)$,

(E_+) $\Gamma\vdash A(a)$,a 不在 Γ 中出现,

$\Rightarrow\Gamma\vdash ExA(x)$,

$(\exists_-)$ $A(a)\vdash B$,a 不在 B 中出现,

$\Rightarrow\exists xA(x)\vdash B$,

$(\exists_+)$ $A(a)\vdash\exists xA(x)$,$A(x)$ 由 $A(a)$ 中 a 的部分出现替换为 x 而得.

推理规则$(\forall_-)$叫做全称量词消去律,在经典二值逻辑演算中,其涵义是指反映了演绎推理中如下的推理思想,若某学科之论域中的所有个体皆有某种性质时,则可结论在该论域中任取一个个体出来,则该个体必具有该性质. 而今在 PIMS 中,因有 $\forall\in\Omega_F$,故在这里$(\forall_-)$所反映的是这样一种推理思想,若某学科之某有穷论域中所有个体都具有某种性质时,则可结论在该有穷论域中任取一个个体,则该个体必具有该性质.

面对某学科的潜无限论域(弹性无穷集合)或实无限论域(刚性无穷集合)中的研究对象 x 而言,由所有 x 具有性质 P 可推出每一 x 具有性质 P,进而还可以推出在论域中无约束地任选一个对象 a 具有性质 P,用符号表示即为

$$\forall xP(x)\vdash ExP(x)\vdash P(a).$$

其中 $ExP(x)$ 与 $P(a)$,不仅同为"枚举手续",而且同属潜无限的现在进行式(going),从而可有:

$$ExP(x)\vdash P(a).$$

然而 $\forall xP(x)$ 是实无限的完成式(gone). 面对无穷论域,由潜无限的现在进行式(going)反推实无限(aci)的完成式(gone)是不合理的,因为完成式(gone)是由现在进行式(going)转化而来,而且在同一层面上的潜无限(poi)只是其实无限(aci)的一个初始片断(Robinson 语),因此有如:

$$P(a) \vdash \forall xP(x) \text{ 或 } ExP(x) \vdash \forall xP(x)$$

一类思想规定根本不合理,亦即如下的:

$$\forall xP(x) \vdash P(a) \text{ 或 } \forall xP(x) \vdash ExP(x)$$

思想规定才是合理的. 这就是说,用兼容两种无穷观的分析工具来考察二值逻辑演算中的全称量词引入律

$$(\forall_+) \quad \Gamma \vdash A(a), a \text{ 不在 } \Gamma \text{ 中出现}, \Rightarrow \Gamma \vdash \forall xA(x)$$

时,不难看出其中隐性地贯彻了一种不合理的思想规定. 故不仅在 PIMS 中,即使在今后构建新的实无限数学系统时,都应把$(\forall_+)$弃之不用. 但对有穷刚性集合而言,$(\forall_+)$还是可以使用的,但为避免引起混淆,我们在 PIMS 中的逻辑演算中,还是将$(\forall_+)$排斥掉. 然而对有穷刚性论域而言,全称量词 $\forall$ 却不可不用,为之,我们还是保留了$(\forall_-)$这一推理规则的使用.

推理规则(E_-)叫做枚举量词消去律:因在 PIMS 中有 $E \in \Omega_P$,故在 PIMS 中,(E_-)所反映的是如下的推理思想:如果某学科之某一潜无限弹性论域中的每一个个体总有某种性质时,则可结论在该潜无限论域中任取一个个体出来,则该个体必具有该性质.

推理规则(E_+)叫做枚举量词引入律:因在 PIMS 中有 $E \in \Omega_P$,故在 PIMS 中,(E_+)所反映的是如下的推理思想:即在某学科的某一潜无限弹性论域中,如果不受任何约束地任选一个个体 a,总能在某种前提下推出 a 具有性质 A 时,则我们就结论在同样的前提下,可推出该潜无限弹性论域中的每一个个体总具有性质 A. 选取个体 a 时,不受任何约束很重要,特别是不受推出它有性质 A 的前提的约束.

推理规则$(\exists_-)$叫做存在量词消去律,由于 PIMS 是在贯彻二分法原则(Ⅱ)(即 $\vdash \Omega_F \vee \Omega_P$)的精神下构建的,故在 PIMS 中,$(\exists_-)$所反映的是这样一种推理思想:如果某学科的某个有穷论域或潜无限弹性论域中任选一个个体 a,只要 a 具有性质 A,就能推出结论 B,那么在肯定该有穷论域或潜无限弹性论域中存在着具有性质 A 的个体情况下,就必能推出结论 B. 在此还应指出,对于个体 a 的选取是不受任何约束的,特别是不受那个被推出的结论 B 的约束.

推理规则($\exists_+$)叫做存在量词引入律:在PIMS中,如果已知某论域(有穷论域或潜无限弹性论域)中之个体a具有性质A,则就结论该有穷论域或潜无限弹性论域中的确存在着具有性质A的个体.

为了方便,我们将公式集$\Sigma=\{A_0,A_1,\cdots,A_{n-1},A_n\}$直接写成公式序列的形式:$A_0,A_1,\cdots,A_{n-1},A_n$. 当然,因为$\Sigma$是集,所以序列中的公式的次序是没有关系的. 这样,

$\{A_0,A_1,\cdots,A_{n-1},A_n\}\vdash B$、$\Sigma\cup\{A\}\vdash B$、$\Sigma\cup\Sigma'\vdash B$可以分别表示为:$A_0,A_1,\cdots,A_{n-1},A_n\vdash B$、$\Sigma,A\vdash B$、$\Sigma,\Sigma'\vdash B$.

将$\Sigma\vdash A_1,\cdots,\Sigma\vdash A_n$简记为$\Sigma\vdash A_1,\cdots,A_n$.

定义7.7 公式A在谓词逻辑F^{PIN}中由公式集Σ形式可推演(符号记为$\Sigma\vdash A$),当且仅当$\Sigma\vdash A$能由有限次使用推理规则而生成.

如果$\Sigma\vdash A$,则称公式A是Σ的语法后承.

定义7.8 如果公式A由$\varnothing$形式可推演,则称公式A是可证明的. 由$\varnothing$到A形式可推演的一个公式序列称为公式A的一个证明. 如果公式A是可证明的,则称公式A为F^{PIN}系统的定理,符号记为$\vdash A$.

定理7.4 如果$\Sigma\vdash A$,则存在有限集Σ^*,$\Sigma^*\subseteq\Sigma(\Sigma^*\overrightarrow{\subseteq}\Sigma)$,使得$\Sigma^*\vdash A$.

(四)F^{PIN}的语义:

定义7.9 (模型) 一阶语言PIMS的一个模型$\mathfrak{M}$是一个三元序组

$$\langle M,\{R_i^{\mathfrak{M}}\}_{i\in I},\{a_k^{\mathfrak{M}}\}_{k\in K}\rangle$$

它由三部分构成:

(1)一个非空的有穷集合或者潜无限弹性集合M,称为模型的$\mathfrak{M}$的论域;

(2)$\mathfrak{M}(R_i)\subseteq M^n(\mathfrak{M}(R_i)\overrightarrow{\subseteq}M^n)$,对于PIMS中的每一个$n$元关系符号$R_i$;

(3)$\mathfrak{M}(a_k)\in M\ (\mathfrak{M}(a_k)\overrightarrow{\in}M)$,对于PIMS中的每一个常元符号①.

定义7.10 设$\mathfrak{M}$是一个模型,模型$\mathfrak{M}(a_i/m_j)$指的是:

---

① 在此,我们引入表示集合Σ与其元素x之间关系的符号. 当Σ是一个有穷集合时,集合Σ与其元素x之间的关系符号表示为$x\in\Sigma$;当Σ是一个潜无限集合时,集合Σ与其元素x之间的关系符号表示为$x\overrightarrow{\in}\Sigma$. 详细论述请见7.4:潜无限数学系统(Ⅳ)——集合论基础. 下同.

$$\mathfrak{M}(a_i/m_i)(w) = \begin{cases} \mathfrak{M}(w), \text{如果 } w \neq a_i; \\ m_i, \quad \text{如果 } w = a_i. \end{cases}$$

定义 7.11(公式的基本语义定义)　设 $\mathfrak{M}$ 是一个模型,A 是一个公式,满足下列条件的 $\mathfrak{M}$ 称为 F^{PIN} 模型:

(1) $\mathfrak{M}(p_i) \in \{0,1\}$;

(2) $\mathfrak{M}(F_i^n(a_1,\cdots,a_n)) = 1$,当且仅当 $\langle\mathfrak{M}(a_1),\cdots,\mathfrak{M}(a_n)\rangle \in \mathfrak{M}(F_i^n)(\langle\mathfrak{M}(a_1),\cdots,\mathfrak{M}(a_n)\rangle \overset{\leftarrow}{\in} \mathfrak{M}(F_i^n))$;

(3) $\mathfrak{M}(\neg A) = 1$,当且仅当 $\mathfrak{M}(A) = 0$;

(4) $\mathfrak{M}(A \rightarrow B) = 1$,当且仅当 $\mathfrak{M}(A) = 0$ 或者 $\mathfrak{M}(B) = 1$;

(5) $\mathfrak{M}(A \vee B) = 1$,当且仅当 $\mathfrak{M}(A) = 1$ 或者 $\mathfrak{M}(B) = 1$;

(6) $\mathfrak{M}(A \wedge B) = 1$,当且仅当 $\mathfrak{M}(A) = 1$ 并且 $\mathfrak{M}(B) = 1$;

(7) $\mathfrak{M}(A \leftrightarrow B) = 1$,当且仅当"$\mathfrak{M}(A) = 1$ 并且 $\mathfrak{M}(B) = 1$"或者"$\mathfrak{M}(A) = 0$ 并且 $\mathfrak{M}(B) = 0$";

(8) 如果 $\mathfrak{M}(\forall xA(x)) = 1$,那么对于每一 $m \in M(m \overset{\leftarrow}{\in} M)$,都有 $\mathfrak{M}(a_i/m)(A(a_i)) = 1$;

(9) $\mathfrak{M}(\exists xA(x)) = 1$,当且仅当存在 $m \in M(m \overset{\rightarrow}{\in} M)$,使得 $\mathfrak{M}(a_i/m)(A(a_i)) = 1$;

(10) $\mathfrak{M}(ExA(x)) = 1$,当且仅当对于每一 $m \in M(m \overset{\leftarrow}{\in} M)$,都有 $\mathfrak{M}(a_i/m)(A(a_i)) = 1$.

定理 7.5　设 $\mathfrak{M}$ 是一个 F^{PIN} 模型,A 是任一公式,则

$$\mathfrak{M}(A) \in \{1,0\}.$$

定义 7.12(可满足性)　设 A 是公式,Σ 是公式集. 称 A 是可满足的,当且仅当存在一个 F^{PIN} 模型 $\mathfrak{M}$,使得 $\mathfrak{M}(A) = 1$;称 Σ 是可满足的,当且仅当存在一个 F^{PIN} 模型 $\mathfrak{M}$,使得对于任何 B,如果 $B \in \Sigma(B \overset{\leftarrow}{\in} \Sigma)$,则 $\mathfrak{M}(B) = 1$,简记为 $\mathfrak{M}(\Sigma) = 1$.

定义 7.13(有效性)　设 A 是公式. 称 A 是有效的,当且仅当对于任一 F^{PIN} 模型 $\mathfrak{M}$,都有 $\mathfrak{M}(A) = 1$.

定义 7.14　设 A 是公式,Σ 是公式集. A 是 Σ 的语义后承,记作

$$\Sigma \models A,$$

当且仅当对于任何 F^{PIN} 模型 $\mathfrak{M}$,$\mathfrak{M}(\Sigma) = 1$ 蕴涵 $\mathfrak{M}(A) = 1$.

显然,如果 $\varnothing \models A$,当且仅当 A 是有效式.

定理 7.6

(Ref) $A \models A$,

$(\tau)\Gamma \models \Delta, \Delta \models A \Rightarrow \Gamma \models A$,

$(\neg)\Gamma, \neg A \models B, \neg B \Rightarrow \Gamma \models A$,

$(\to\ )A \to B, A \models B$,

$(\to\ )\Gamma, A \models B \Rightarrow \Gamma \models A \to B$,

$(\wedge\ )A \wedge B \models A, B$,

$(\wedge\ )A, B \models A \wedge B$,

$(\vee\ )A \models C, B \models C \Rightarrow A \vee B \models C$,

$(\vee\ )A \models A \vee B, B \vee A$,

$(\leftrightarrow\ )\ A \leftrightarrow B, A \models B$

$A \leftrightarrow B, B \models A$

$(\leftrightarrow\ )\Gamma, A \models B, \Gamma, B \models A \Rightarrow \Gamma \models A \leftrightarrow B$,

$(\forall\ )\forall x A(x) \models A(a)$,

$(\mathrm{E}\ )\mathrm{E}x A(x) \models A(a)$,

$(\mathrm{E}\ )\ \Gamma \models A(a)$，$a$ 不在 Γ 中出现，

$\Rightarrow \Gamma \models \mathrm{E}x A(x)$，

$(\exists\ )\ A(a) \models B$，$a$ 不在 B 中出现，

$\Rightarrow \exists x A(x) \models B$

$(\exists\ )A(a) \models \exists x A(x)$，$A(x)$ 由 $A(a)$ 中 a 的部分出现替换为 x 而得.

证明 我们只涉及量词的部分.

(1) $\forall x A(x) \models A(a)$

假设 $\forall x A(x) \models A(a)$ 不成立，则存在 $\mathrm{F}^{\mathrm{PIN}}$ 模型 $\mathfrak{M}$，使得

① $\mathfrak{M}(\forall x A(x)) = 1$

但是

② $\mathfrak{M}(A(a)) = 0$

而由 ① 可得：

③ 对于任意 $m \in M(m \dot{\in} M)$，都有 $\mathfrak{M}(a_i/m)(A(a_i)) = 1$

因此，对于 $\mathfrak{M}(a) \in M(\mathfrak{M}(a) \dot{\in} M)$，有 $\mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(A(a_i)) = 1$

即有

④ $\mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(a_i) \in \mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(A))$

$(\mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(a_i) \dot{\in} \mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(A))$

而 $\mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(a_i) = \mathfrak{M}(a)$，$\mathfrak{M}(a_i/\mathfrak{M}(a))(A) = \mathfrak{M}(A)$

所以有

⑤ $\mathfrak{M}(a) \in \mathfrak{M}(A)(\mathfrak{M}(a) \stackrel{\cdot}{\in} \mathfrak{M}(A))$

因此

⑥ $\mathfrak{M}(A(a)) = 1$

② 和 ⑥ 矛盾. 假设不成立.

所以, $\forall xA(x) \models A(a)$.

(2) $ExA(x) \models A(a)$

证明与(1)类似. 略.

(3) $\Sigma \models A(a)$, a 不在 Σ 中出现 $\Rightarrow \Sigma \models ExA(x)$.

假设 $\Sigma \models A(a)$(a 不在 Σ 中出现)成立,而 $\Sigma \models ExA(x)$ 不成立. 则存在 F^{PIN} 模型 $\mathfrak{M}$,使得

① $\mathfrak{M}(\Sigma) = 1$

但是

② $\mathfrak{M}(ExA(x)) = 0$

由 ② 可得

③ 存在 $m \in M(m \stackrel{\rightarrow}{\in} M)$,使得 $\mathfrak{M}(a/m)(A(a)) = 0$

因为 a 不在 Σ 中出现,所以由 ① 和 ③ 可得

④ $\mathfrak{M}(a/m)(\Sigma) - 1$

因为 $\Sigma \models A(a)$(a 不在 Σ 中出现),所以有

⑤ $\mathfrak{M}(a/m)(A(a)) = 1$

③ 和 ⑤ 矛盾. 假设不成立.

所以, $\Sigma \models A(a)$, a 不在 Σ 中出现 $\Rightarrow \Sigma \models ExA(x)$.

关于存在量词推理规则的有效性证明与经典逻辑相同,略.

定理 7.7 在 F^{PIN} 中,

(1) $\models \forall xP(x) \rightarrow P(a)$;

(2) $\models \forall xP(x) \rightarrow EVxP(x)$;

(3) $\not\models ExP(x) \rightarrow \forall xP(x)$.

7.3 潜无限数学系统(Ⅲ)—— 逻辑基础之元理论

在本节中,我们将在 7.2 节的基础上,证明潜无限数学系统的逻辑形式系统的可靠性和完全性.

定理 7.8 F^{PIN} 可靠性定理

(1) 如果 $\Sigma \vdash A$,那么 $\Sigma \models A$;

(2) 如果 $\vdash A$,那么 $\models A$.

证明

(1) 施归纳于 $\Sigma \vdash A$ 推演的长度 $\mathcal{N}$(计算推演程度时 Σ 除外).

基始 当 $\mathcal{N} = 1$,此时推演可分别由规则(Ref)、($\rightarrow_-$)、($\wedge$)、($\wedge_+$)、($\vee_+$)、($\leftrightarrow$)、($\forall$)、(E)、($\exists_+$)直接得到. 根据定理 5.6,显然有 $\Sigma \models A$.

归纳步骤 假设当 $\mathcal{N} = k$ 时,定理成立. 那么当 $\mathcal{N} = k + 1$ 时. 此时推演可能由规则(Ref)、($\rightarrow$)、($\wedge_-$)、($\wedge_+$)、($\vee_+$)、($\leftrightarrow$)、($\forall$)、(E)、($\exists_+$) 直接得到. 根据定理 5.6,显然有 $\Sigma \models A$.

推演也可能从其他规则得到,那么根据归纳假设和定理 7.4,同样有 $\Sigma \models A$.

(2) 是(1) 的特殊情形.

定义 7.15(协调性) 公式集 Σ 是协调的,当且仅当不存在公式 A,使得 $\Sigma \vdash A$ 并且 $\Sigma \vdash \neg A$.

显然,协调性是一个纯语法的概念.

定义 7.16 公式集 Σ 是潜在性极大协调的,当且仅当 Σ 满足:

(1) Σ 是协调的;

(2) 对于任何 $A \notin \Sigma(A \vec{\notin} \Sigma)$,$\Sigma \cup \{A\}$ 是不协调的.

定理 7.9 设 Σ 是潜在性极大协调集. 对于任何公式 A,$\Sigma \vdash A$ 当且仅当 $A \in \Sigma(A \vec{\in} \Sigma)$.

证明 假设 $A \in \Sigma(A \vec{\in} \Sigma)$,则显然有 $\Sigma \vdash A$.

假设 $\Sigma \vdash A$. 如果 $A \notin \Sigma(A \vec{\notin} \Sigma)$,那么因为 Σ 是潜在性极大协调的,于是有 $\Sigma \cup \{A\}$ 是不协调的,因此存在公式 B,$\Sigma \cup \{A\} \vdash B$ 并且 $\Sigma \cup \{A\} \vdash \neg B$,因此有 $\Sigma \vdash \neg A$. 这与 Σ 是协调的相矛盾. 因此 $A \in \Sigma(A \vec{\in} \Sigma)$.

定理 7.10 设 Σ 是潜在性极性极大协调集. 对于任何公式 A,$\Sigma \vdash \neg A$ 当且仅当 $\Sigma \nvdash A$.

定理 7.11 任何协调的公式集都能够扩充为潜在性极大协调集.

证明 设 Σ 是任一协调的公式集. 令

$$[※]: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

是 PIMS 中任意一个公式都能被包含进去的潜无限弹性序列. 我们定义一个公式集的潜无限弹性序列 $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n$,如下:

(1) $\Sigma_0 = \Sigma$;

(2) $\Sigma_{n+1}\begin{cases}\Sigma_n \cup \{A_{n+1}\}, & \text{如果 } \Sigma_n \cup \{A_{n+1}\} \text{ 是协调;}\\ \Sigma_n, & \text{否则.}\end{cases}$

于是有

(3) $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}(\Sigma_n \vec{\subseteq} \Sigma_{n+1})$;

(4) 对于任一 $n(\vec{\in}\ \omega)$，Σ_n 是协调的.

令 $\Sigma^* = \bigcup_{n \vec{\in} \omega} \Sigma_n$. 那么有

(5) $\Sigma \subseteq \Sigma^*(\Sigma \vec{\subseteq} \Sigma^*)$,

(6) Σ^* 是潜在性极大协调的.

下面证明(6).

先证 Σ^* 是协调的. 假设 Σ^* 不是协调的. 那么存在公式 B, 使得 $\Sigma^* \vdash B$, 并且 $\Sigma^* \vdash \neg B$. 根据定理 7.4 可知，存在 Σ^* 中的有限个公式 B_1, $\cdots$, B_k, B_{k+1}, $\cdots$, B_{k+l}, 使得

(7) $B_1, \cdots, B_k \vdash B$,

(8) $B_{k+1}, \cdots, B_{k+l} \vdash \neg B$.

所以，$\{B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_{k+l}\}$ 是不协调的. 设 $B_i \in \Sigma_{m_i}(B_i \vec{\in} \Sigma_{m_i})(1 \leqslant i \leqslant k+l$, $m_i \vec{\in} \omega)$，令 $m = \max(m_1, \cdots, m_k, \cdots, m_{k+l})$. 由(3) 可得，$\{B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_{k+l}\} \subseteq \Sigma_m(\{B_1, \cdots, B_k, \cdots B_{k+l}\} \vec{\subseteq} \Sigma_m)$，因此 Σ_m 是不协调的. 这与(4) 矛盾. 所以，Σ^* 是协调的.

再证 Σ^* 是潜在性极大协调的. 假设公式 $C \notin \Sigma^*(C \vec{\notin} \Sigma^*)$，那么根据 Σ^* 的定义可知对于任一 $n(\vec{\in}\ \omega)$，$C \notin \Sigma_n(C \vec{\notin} \Sigma_n)$. 假设在序列[※]中，$C = A_{j+1}$. 根据 Σ_{j+1} 的构造可知，$\Sigma_j \cup \{C\}$ 是不协调的. 因为如果协调 $\Sigma_j \cup \{C\}$，则 $\Sigma_{j+1} = \Sigma_j \cup \{C\}$，因此 $C \in \Sigma_{j+1}(C \vec{\in} \Sigma_{j+1})$，这与对于任一 $n(\vec{\in}\ \omega)$，$C \in \Sigma_n(C \vec{\notin} \Sigma_n)$ 矛盾. 这样，因为 $\Sigma_j \subseteq \Sigma^*(\Sigma_j \vec{\subseteq} \Sigma^*)$，所以 $\Sigma^* \cup \{C\}$ 是不协调的.

因此，Σ^* 是潜在性极大协调的.

定义 7.17 一阶语言 PIMS⁺ 是在一阶语言 PIMS 中增加一列新的常元符号：

$$u'_1、u'_2、\cdots、u'_n$$

而构成.

我们用 u'、v'、w' 表示任意的新常元符号.

定义 7.18 设 Σ 是 PIMS 中的公式集. 称 Σ 有存在性质，当且仅当

对于任何存在公式 $\exists xA(x)$，如果 $\exists xA(x) \in \Sigma(\exists xA(x) \vec{\in} \Sigma)$，则存在 u' 使得 $A(u') \in \Sigma(A(u') \vec{\in} \Sigma)$.

定理 7.12 设 Σ 是 PIMS 中的公式集，并且 Σ 是协调集，则 Σ 能扩充为 PIMS' 中潜在性极大协调集 Σ^*，并且 Σ^* 有存在性质.

证明 因为 PIMS' 中公式集是潜无限弹性集合或潜序列，所以由任意存在公式构成的它的无穷子集也是潜无限弹性集合或潜序列. 令

(1) $\exists xA_1(x)$、$\exists xA_2(x)$、$\exists xA_3(x)$、…、$\exists xA_{\vec{n}}(x)$

是这个子集中每一元素的任一排列.

定义 PIMS' 中公式集 Σ_n 的潜无限序列如下：

$$\Sigma、\Sigma_1、\Sigma_2、\Sigma_3、\cdots、\Sigma_{\vec{n}}$$

令 $\Sigma_0 = \Sigma$.

取(1)中的第一个存在公式 $\exists xA_1(x)$. 因为 $\exists xA_1(x)$ 的长度是有限的，因此我们总能找到某个 u'，使得 u' 不在 $\exists xA_1(x)$ 中出现. 因为 $\Sigma_0 = \Sigma$，所以 u' 也不在 Σ_0 中出现. 令

$$\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\exists xA_1(x) \rightarrow A_1(u')\}.$$

假设已经定义出 $\Sigma_0, \Sigma_1, \cdots, \Sigma_n$. 取(1)中的存在公式 $\exists xA_{n+1}(x)$. 因为 $\{u'_1, u'_2, \cdots, u'_{\vec{n}}\}$ 是潜无限集，并且在每个 $\Sigma_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中出现在 $\exists xA_i(x)$ 中的新常元以及在 $A_i(w')$ 中用去的新常元都是有限的，所以，我们总能找到某个 v'，使得 v' 不在 $\exists xA_{n+1}(x)$ 中也不在 Σ_n 中出现. 令

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n \cup \{\exists xA_{n+1}(x) \rightarrow A_{n+1}(v')\}.$$

显然，

(2) 对于任一 $n(n \vec{\in} \omega)$，$\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$；

(3) 对于任一 $n(n \vec{\in} \omega)$，Σ_n 是协调的.

(3) 可以通过归纳证明.

归纳基始.

Σ_0 是协调的.

归纳步骤.

假设 Σ_n 是协调的. 如果 Σ_{n+1} 不是协调的，那么有

$\Sigma_n \vdash \neg(\exists xA_{n+1}(x) \rightarrow A_{n+1}(v'))$

$\Sigma_n \vdash \exists xA_{n+1}(x) \wedge \neg A_{n+1}(v')$

$\Sigma_n \vdash Ey(\exists xA_{n+1}(x) \wedge \neg A_{n+1}(y))$

$\Sigma_n \vdash Ey(\exists xA_{n+1}(x) \wedge \neg A_{n+1}(y)) \rightarrow (\exists xA_{n+1}(x) \wedge Ey \neg A_{n+1}(y))$

$\Sigma_n \vdash \exists xA_{n+1}(x) \wedge Ey \neg A_{n+1}(y)$

$\Sigma_n \vdash \exists xA_{n+1}(x) \wedge Ex \neg A_{n+1}(x)$

$\Sigma_n \vdash \exists xA_{n+1}(x) \wedge \neg \exists xA_{n+1}(x)$

这与归纳假设 Σ_n 是协调的相矛盾. 因此 Σ_{n+1} 是协调的.

令 $\Sigma' = \bigcup_{n \vec{\in} \omega} \Sigma_n$, 则 Σ' 是协调的. 假设 Σ' 不是协调的. 那么存在公式 B, 使得 $\Sigma' \vdash B$, 并且 $\Sigma' \vdash \neg B$. 根据定理 7.4 可知, 存在 Σ' 中的有限个公式 $B_1, \cdots, B_k, B_{k+1}, \cdots, B_{k+l}$, 使得

$$B_1, \cdots, B_k \vdash B,$$

$$B_{k+1}, \cdots, B_{k+l} \vdash \neg B.$$

所以, $\{B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_{k+l}\}$ 是不协调的. 设 $B_i \in \Sigma_{m_i}$ ($1 \leqslant i \leqslant k+l, m_i \in \omega$), 令 $m = \max(m_1, \cdots, m_k, \cdots, m_{k+l})$. 由(2)可得, $\{B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_{k+l}\} \subset \Sigma_m$ ($\{B_1, \cdots, B_k, \cdots, B_{k+l}\} \vec{\subset} \Sigma_m$), 因此 Σ_m 是不协调的. 这与(3)矛盾. 所以, Σ' 是协调的.

由定理 7.11 可知, Σ' 能扩充为潜在性极大协调集 $\Sigma^* \vec{\subseteq} \mathrm{Form}(L^{FO+})$.

最后证明 Σ^* 具有存在性质.

对于 PIMS 中的任何存在公式 $\exists x A(x) \in \Sigma^*$, 设 $\exists x A(x)$ 在序列 (1) 中为 $\exists x A_k(x)$, 因此存在 u',

$$\exists x A_k(x) \to A_k(u') \in \Sigma_k \quad (\exists x A_k(x) \to A_k(u') \vec{\in} \Sigma_k)$$

所以有

$$\exists x A_k(x) \to A_k(u') \in \Sigma^*$$

$$\Sigma^* \vdash \exists x A_k(x) \to A_k(u')$$

$$\Sigma^* \vdash \exists x A_k(x)$$

$$\Sigma^* \vdash A_k(u')$$

$$A_k(u') \vec{\in} \Sigma^*$$

因此, Σ^* 具有存在性质.

定理 7.13 设 Σ 是具有存在性质的潜在性极大协调集, 令 $M = \{a \mid a$ 是 Σ 中出现的常元$\}$, 则

(1) $A \in \Sigma$ ($A \vec{\in} \Sigma$) 当且仅当 $\neg A \notin \Sigma$ ($\neg A \vec{\notin} \Sigma$);

(2) $(A \to B) \in \Sigma$ ($(A \to B) \vec{\in} \Sigma$), 当且仅当 $A \notin \Sigma$ ($A \vec{\notin} \Sigma$) 或者 $B \in \Sigma$ ($B \vec{\in} \Sigma$);

(3) $(A \vee B) \in \Sigma$ ($(A \vee B) \vec{\in} \Sigma$), 当且仅当 $A \in \Sigma$ ($A \vec{\in} \Sigma$) 或者 $B \in \Sigma$ ($B \vec{\in} \Sigma$);

(4) $(A \wedge B) \in \Sigma$ ($(A \wedge B) \vec{\in} \Sigma$), 当且仅当 $A \in \Sigma$ ($A \vec{\in} \Sigma$) 并且 $B \in \Sigma$ ($B \vec{\in} \Sigma$);

(5)$(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$，当且仅当“$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$ 并且 $B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$”或者“$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$ 并且 $B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$”；

(6) 如果 $\forall xA(x)\in\Sigma(\forall xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，那么对于每一 $a\in M(a\vec{\in}M)$，都有 $A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$；

(7) $\exists xA(x)\in\Sigma(\exists xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，当且仅当存在 $a\in M(a\vec{\in}M)$，并且 $A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$；

(8)$ExA(x)\in\Sigma(ExA(x)\vec{\in}\Sigma)$，当且仅当对于每一 $a\in M(a\vec{\in}M)$，都有 $A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$.

证明

(1) 先证 $\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)\Rightarrow A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$. 假设 $\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$，如果 $A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$，那么有 $\Sigma\vdash A$ 并且 $\Sigma\vdash\neg A$，因此 Σ 是不协调的，这与 Σ 是潜在性极大协调集矛盾. 因此 $A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$.

再证 $A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)\Rightarrow\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$. 假设 $A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$，如果 $\neg A\notin\Sigma(\neg A\vec{\notin}\Sigma)$，则 $\Sigma\cup\{A\}$ 是不协调的并且 $\Sigma\cup\{\neg A\}$ 是不协调的. 那么根据定理 7.9 的证明中有 $\Sigma\vdash\neg A$ 并且 $\Sigma\vdash\neg\neg A$，那么 Σ 是不协调的，这与 Σ 是潜在性极大协调集矛盾. 因此 $\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$.

(2) 如果 $A\rightarrow B\in\Sigma(A\rightarrow B\vec{\in}\Sigma)$ 并且 $A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$，那么有 $\Sigma\vdash A\rightarrow B$ 并且 $\Sigma\vdash A$，所以有 $\Sigma\vdash B$，根据定理 7.9 可得 $B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$.

如果 $A\rightarrow B\notin\Sigma(A\rightarrow B\vec{\notin}\Sigma)$，那么根据(1) 有 $\neg(A\rightarrow B)\in\Sigma(\neg(A\rightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$，根据定理 7.9 可得 $\Sigma\vdash\neg(A\rightarrow B)$，所以有 $\Sigma\vdash A$ 并且 $\Sigma\vdash\neg B$，根据定理 7.9 可得 $A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$ 并且 $\neg B\in\Sigma(\neg B\vec{\in}\Sigma)$，所以根据(1) 有 $A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$ 但是 $B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$. 即有：并非如果 $A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$，那么 $B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$.

(3) 假设 $(A\vee B)\in\Sigma((A\vee B)\vec{\in}\Sigma)$，但是 $A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$ 并且 $B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$. 因为 $A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$，由(1) 可得 $\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$，因此由定理7.9 可得：$\Sigma\vdash\neg A$. 同理可得：$\Sigma\vdash\neg B$，因此有 $\Sigma\vdash\neg A\wedge\neg B$，进而有 $\Sigma\vdash\neg(A\vee B)$. 同样由定理 7.9 可知：$\neg(A\vee B)\in\Sigma(\neg(A\vee B)\vec{\in}\Sigma)$.

又因为$(A\vee B)\in\Sigma((A\vee B)\vec{\in}\Sigma)$，由此可得$\Sigma$不协调.

这与Σ是潜在性极大协调集相矛盾，所以假设不成立. 因此：

如果$(A\vee B)\in\Sigma((A\vee B)\vec{\in}\Sigma)$，那么$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$或者$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$.

假设$(A\vee B)\notin\Sigma((A\vee B)\vec{\notin}\Sigma)$，但是$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$或者$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$. 因为$(A\vee B)\notin\Sigma((A\vee B)\vec{\notin}\Sigma)$，根据(1)可得$\neg(A\vee B)\in\Sigma(\neg(A\vee B)\vec{\in}\Sigma)$，因此由定理7.9可得：$\Sigma\vdash\neg(A\vee B)$，因此有$\Sigma\vdash\neg A\wedge\neg B$，进而有$\Sigma\vdash\neg A$，并且$\Sigma\vdash\neg B$. 同样根据定理7.9可知：$\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$并且$\neg B\in\Sigma(\neg B\vec{\in}\Sigma)$. 根据(1)可知：$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$或者$B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$，这与$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$或者$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$相矛盾.

因此，如果$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$或者$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$，那么$(A\vee B)\in\Sigma((A\vee B)\vec{\in}\Sigma)$.

(4) 假设$(A\wedge B)\in\Sigma((A\wedge B)\vec{\in}\Sigma)$，则$\Sigma\vdash A\wedge B$，进而有：$\Sigma\vdash A$并且$\Sigma\vdash B$. 因此由定理7.9可知：$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$并且$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$.

假设$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$并且$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$，则$\Sigma\vdash A$并且$\Sigma\vdash B$，进而有：$\Sigma\vdash A\wedge B$. 因此由定理7.9可知：$(A\wedge B)\in\Sigma((A\wedge B)\vec{\in}\Sigma)$.

(5) 先证$\Rightarrow$.

假设$(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$，并且并非"$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$并且$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$". 由并非"$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$并且$B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$"可得：$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$或者$B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$.

假设$A\in\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$，根据(1)可得$\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$，因此有$\Sigma\vdash\neg A$. 由$(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$可得：$\Sigma\vdash A\leftrightarrow B$. 所以有$\Sigma\vdash\neg B$，因此有$\neg B\in\Sigma(\neg B\vec{\in}\Sigma)$，根据定理7.9可得：$B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$. 进而有$A\notin\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$并且$B\notin\Sigma(B\notin\Sigma)$. 并且$B\notin\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$.

假设$B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$，同样可证：$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$并且$B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$.
所以总有

$$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)\text{ 并且 }B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma).$$

因此有

如果$(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$，那么“$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$ 并且 $B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$”或者“$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$ 并且 $B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$”.

再证 $\Leftarrow$.

假设“$A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$ 并且 $B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$”或者“$A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$ 并且 $B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$”. 则：

倘若 $A\in\Sigma(A\vec{\in}\Sigma)$ 并且 $B\in\Sigma(B\vec{\in}\Sigma)$，则有 $\Sigma\vdash A$ 并且 $\Sigma\vdash B$，进而有 $\Sigma\vdash A\wedge B$，而 $A\wedge B\vdash A\leftrightarrow B$，所以有 $\Sigma\vdash A\leftrightarrow B$，根据定理 7.9 有 $(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$.

倘若 $A\notin\Sigma(A\vec{\notin}\Sigma)$ 并且 $B\notin\Sigma(B\vec{\notin}\Sigma)$，则有 $\neg A\in\Sigma(\neg A\vec{\in}\Sigma)$，并且 $\neg B\in\Sigma(\neg B\vec{\in}\Sigma)$，因此有 $\Sigma\vdash\neg A$ 并且 $\Sigma\vdash\neg B$，进而有 $\Sigma\vdash\neg A\wedge\neg B$，而 $\neg A\wedge\neg B\vdash A\leftrightarrow B$，所以 $\Sigma\vdash A\leftrightarrow B$，根据定理 7.9 有 $(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma)$.

所以，不论哪种情况均有

$$(A\leftrightarrow B)\in\Sigma((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma).$$

(6) 假设 $\forall xA(x)\in\Sigma(\forall xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，但是存在常元 $a\in M(a\vec{\in}M)$，并且 $A(a)\notin\Sigma(A(a)\vec{\notin}\Sigma)$. 则：

因为 $\forall xA(x)\in\Sigma(\forall xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，所以 $\Sigma\vdash\forall xA(x)$，又因为：$\forall xA(x)\vdash A(a)$，所以有 $\Sigma\vdash A(a)$，根据定理 7.9 可得：$A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$. 这与 $A(a)\notin\Sigma(A(a)\vec{\notin}\Sigma)$ 相矛盾. 所以假设不成立. 因此：

如果 $\forall xA(x)\in\Sigma(\forall xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，那么对于每一 $a\in M(a\vec{\in}M)$，都有 $A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$.

(7) 假设 $\exists xA(x)\in\Sigma(\exists xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，则因为 Σ 是具有存在性质的潜在性极大协调集，所以存在 $a\in M(a\vec{\in}M)$，使得 $A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$.

假设存在 $a\in M(a\vec{\in}M)$，并且 $A(a)\in\Sigma(A(a)\vec{\in}\Sigma)$. 则根据定理 7.9 有 $\Sigma\vdash A(a)$，又因为：$A(a)\vdash\exists xA(x)$，所以有 $\Sigma\vdash\exists xA(x)$. 同样根据定理 7.9 可得：$\exists xA(x)\in\Sigma(\exists xA(x)\vec{\in}\Sigma)$.

(8) 假设 $ExA(x)\in\Sigma(\exists xA(x)\vec{\in}\Sigma)$，则根据定理 7.9 有 $\Sigma\vdash ExA(x)$，

而对于每一 $a \in M(a \vec{\in} M)$，有 $ExA(x) \vdash A(a)$，所以有 $\Sigma \vdash A(a)$. 同样根据定理 7.9 可得：对于每一 $a \in M(a \vec{\in} M)$，都有 $A(a) \in \Sigma(A(a) \vec{\in} \Sigma)$.

假设 $ExA(x) \notin \Sigma(ExA(x) \vec{\notin} \Sigma)$，则根据(1)有 $\neg ExA(x) \in \Sigma(\neg ExA(x) \vec{\in} \Sigma)$，因此有 $\Sigma \vdash \neg ExA(x)$；因为 $\neg ExA(x) \vdash \exists x \neg A(x)$，所以有 $\Sigma \vdash \exists x \neg A(x)$，因此 $\exists x \neg A(x) \in \Sigma(\exists x \neg A(x) \vec{\in} \Sigma)$. 因为 Σ 是具有存在性质的潜在性极大协调集，所以存在 $a \in M(a \vec{\in} M)$，使得 $\neg A(a) \in \Sigma(\neg A(a) \vec{\in} \Sigma)$. 根据(1)可得：存在 $a \in M(a \vec{\in} M)$，使得 $A(a) \notin \Sigma(A(a) \vec{\notin} \Sigma)$.

定义 7.19 由具有存在性质的潜在性极大协调集 Σ^* 产生的 $\mathfrak{M}^*$ 是这样构成的：

(1) $M^* = \{a^* \mid a$ 是 Σ^* 中出现的常元.$\}$；

(2) 对于任一个体常元 a，$\mathfrak{M}^*(a) = a^* \in M^*(a^* \vec{\in} M^*)$；

对于任一常元 u'，$\mathfrak{M}^*(u') = u'^* \in M^*(u'^* \vec{\in} M^*)$；

(3) 对于任一 n 元关系符号 R 和任意常元 $a_1^*, \cdots, a_n^* \in M^*(a_n^* \vec{\in} M^*)$，

$$\langle a_1^*, \cdots, a_n^* \rangle \in \mathfrak{M}^*(R)(\langle a_1^*, \cdots, a_n^* \rangle \vec{\in} \mathfrak{M}^*(R))$$

$$\Leftrightarrow R(a_1, \cdots, a_n) \in \Sigma^*(R(a_1, \cdots, a_n) \vec{\in} \Sigma^*).$$

(4) 对于任一 p_i，$p_i \in \Sigma^*(p_i \vec{\in} \Sigma^*)$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^*(p_i) = 1$.

定理 7.14 对于任一常元 c，$\mathfrak{M}^*(c) = c^* \in M^*(c^* \vec{\in} M^*)$.

定理 7.15 对于任何公式 A，令 $\mathfrak{M}^*(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma^*(A \vec{\in} \Sigma^*)$. 则 $\mathfrak{M}^*$ 是一个 F^{PIN} 模型.

证明

根据定义 7.9，显然 $\mathfrak{M}^*$ 是一个模型. 下面验证 $\mathfrak{M}^*$ 是一个 F^{PIN} 模型.

(1) $\mathfrak{M}^*(p_i) \in \{0,1\}$；

因为 Σ^* 是潜在性极大协调集，所以或者 $p_i \in \Sigma^*(p_i \vec{\in} \Sigma^*)$ 或者 $p_i \notin \Sigma^*(p_i \vec{\notin} \Sigma^*)$. 根据定义 7.19，显然有 $\mathfrak{M}^*(p_i) \in \{0,1\}$.

(2) $\mathfrak{M}^*(F_i^n(a_1, \cdots, a_n)) = 1$，当且仅当 $\langle \mathfrak{M}^*(a_1), \cdots, \mathfrak{M}^*(a_n) \rangle \in \mathfrak{M}^*(F_i^n)(\langle \mathfrak{M}^*(a_1), \cdots, \mathfrak{M}^*(a_n) \rangle \vec{\in} \mathfrak{M}^*(F_i^n))$；

因为：$\mathfrak{M}^*(F_i^n(a_1,\cdots,a_n))=1$ 当且仅当 $F_i^n(a_1,\cdots,a_n)\in\Sigma^*(F_i^n(a_1,\cdots,a_n)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $\langle a_1{}^*,\cdots,a_n{}^*\rangle\in\mathfrak{M}^*(F_i^n)(\langle a_1{}^*,\cdots,a_n{}^*\rangle\vec{\in}\mathfrak{M}^*(F_i^n))$

当且仅当 $\langle\mathfrak{M}^*(a_1),\cdots,\mathfrak{M}^*(a_n)\rangle\in\mathfrak{M}^*(F_i^n)$

$(\langle\mathfrak{M}^*(a_1),\cdots,\mathfrak{M}^*(a_n)\rangle\in\mathfrak{M}^*(F_i^n))$

(3) $\mathfrak{M}^*(\neg A)=1$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=0$；

因为 $\mathfrak{M}^*(\neg A)=1$ 当且仅当 $\neg A\in\Sigma^*(\neg A\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $A\notin\Sigma^*(A\vec{\notin}\Sigma^*)$

当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=0$.

(4) $\mathfrak{M}^*(A\to B)=1$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=0$ 或者 $\mathfrak{M}^*(B)=1$；

因为 $\mathfrak{M}^*(A\to B)=1$ 当且仅当 $(A\to B)\in\Sigma^*((A\to B)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $A\notin\Sigma^*(A\vec{\notin}\Sigma^*)$ 或者 $B\in\Sigma^*(B\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=0$ 或者 $\mathfrak{M}^*(B)=1$.

(5) $\mathfrak{M}^*(A\vee B)=1$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=1$ 或者 $\mathfrak{M}^*(B)=1$；

因为 $\mathfrak{M}^*(A\vee B)=1$ 当且仅当 $(A\vee B)\in\Sigma^*((A\vee B)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $A\in\Sigma^*(A\vec{\in}\Sigma^*)$ 或者 $B\in\Sigma^*(B\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=1$ 或者 $\mathfrak{M}^*(B)=1$.

(6) $\mathfrak{M}^*(A\wedge B)=1$ 当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=1$ 并且 $\mathfrak{M}^*(B)=1$；

因为 $\mathfrak{M}^*(A\wedge B)=1$ 当且仅当 $(A\wedge B)\in\Sigma^*((A\wedge B)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $A\in\Sigma^*(A\vec{\in}\Sigma^*)$ 并且 $B\in\Sigma^*(B\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当 $\mathfrak{M}^*(A)=1$ 并且 $\mathfrak{M}^*(B)=1$.

(7) $\mathfrak{M}^*(A\leftrightarrow B)=1$ 当且仅当"$\mathfrak{M}^*(A)=1$ 并且 $\mathfrak{M}^*(B)=1$"或者"$\mathfrak{M}^*(A)=0$ 并且 $\mathfrak{M}^*(B)=0$"；

因为 $\mathfrak{M}^*(A\leftrightarrow B)=1$ 当且仅当 $(A\leftrightarrow B)\in\Sigma^*((A\leftrightarrow B)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当"$A\in\Sigma^*(A\vec{\in}\Sigma^*)$ 并且 $B\in\Sigma^*(B\vec{\in}\Sigma^*)$"

或者"$A\notin\Sigma^*(A\vec{\notin}\Sigma^*)$ 并且 $B\notin\Sigma^*(B\vec{\notin}\Sigma^*)$"

当且仅当"$\mathfrak{M}^*(A)=1$ 并且 $\mathfrak{M}^*(B)=1$"

或者"$\mathfrak{M}^*(A)=0$ 并且 $\mathfrak{M}^*(B)=0$".

(8) 如果 $\mathfrak{M}^*(\forall xA(x))=1$，那么对于每一 $m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$，都有 $\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A(a_i))=1$；

因为如果$\mathfrak{M}^*(\forall xA(x))=1$当且仅当$\forall xA(x)\in\Sigma^*(\forall xA(x)\vec{\in}\Sigma^*)$,

那么对于每一$a\in M(a\vec{\in}M)$,都有$A(a)\in\Sigma^*(A(a)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当对于每一$a^*\in M^*(a^*\vec{\in}M^*)$,都有$\mathfrak{M}^*(A(a))=1$

当且仅当对于每一$a^*\in M^*(a^*\vec{\in}M^*)$,都有$\mathfrak{M}^*(a),\in\mathfrak{M}^*(A)(\mathfrak{M}^*(a)\vec{\in}\mathfrak{M}^*(A))$,

当且仅当对于每一$a^*\in M^*(a^*\vec{\in}M^*)$,都有$a^*\in\mathfrak{M}^*(A)(a^*\vec{\in}\mathfrak{M}^*(A))$,

当且仅当对于每一$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,都有$m\in\mathfrak{M}^*(A)(m\vec{\in}\mathfrak{M}^*(A))$,

当且仅当对于每一$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,都有$M^*(a_i/m)(a_i)\in\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A)(\mathfrak{M}^*(a_i/m)(a_i)\vec{\in}\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A))$,

当且仅当对于每一$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,都有$\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A(a_i))=1$.

(9) $\mathfrak{M}^*(\exists xA(x))=1$当且仅当存在$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,使得$\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A(a_i))=1$;

因为$\mathfrak{M}^*(\exists xA(x))=1$当且仅当$\exists xA(x)\in\Sigma^*(\exists xA(x)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当存在$a\in M(a\vec{\in}M)$,使得$A(a)\in\Sigma^*(A(a)\vec{\in}\Sigma^*)$

当且仅当存在$a^*\in M^*(a^*\vec{\in}M^*)$,使得$\mathfrak{M}^*(A(a))=1$

当且仅当存在$a^*\in M^*(a^*\vec{\in}M^*)$,使得$\mathfrak{M}^*(a)\in\mathfrak{M}^*(A)(\mathfrak{M}^*(a)\vec{\in}\mathfrak{M}^*(A))$.

当且仅当存在$a^*\in M^*(a^*\vec{\in}M^*)$,使得$a^*\in\mathfrak{M}^*(A)(a^*\vec{\in}\mathfrak{M}^*(A))$

当且仅当存在$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,使得$m\in\mathfrak{M}^*(A)(m\vec{\in}\mathfrak{M}^*(A))$

当且仅当存在$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,使得$\mathfrak{M}^*(a_i/m)(a_i)\in\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A)(\mathfrak{M}^*(a_i/m)(a_i)\vec{\in}\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A))$

当且仅当存在$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,使得$\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A(a_i))=1$.

(10) $\mathfrak{M}^*(ExA(x))=1$当且仅当对于每一$m\in M^*(m\vec{\in}M^*)$,都有$\mathfrak{M}^*(a_i/m)(A(a_i))=1$.

因为$\mathfrak{M}^*(ExA(x))=1$当且仅当$(ExA(x))\in\Sigma^*((ExA(x))\vec{\in}$

Σ^{*})

当且仅当对于每一$a \in M$ ($a \vec{\in} M$),都有 $A(a) \in \Sigma^{*}$ ($A(a) \vec{\in} \Sigma^{*}$)

当且仅当对于每一$a^{*} \in M^{*}$ ($a^{*} \vec{\in} M^{*}$),都有 $\mathfrak{M}^{*}(A(a)) = 1$

当且仅当对于每一$a^{*} \in M^{*}$ ($a^{*} \vec{\in} M^{*}$),都有 $\mathfrak{M}^{*}(a) \in \mathfrak{M}^{*}(A)$ ($\mathfrak{M}^{*}(a) \vec{\in} \mathfrak{M}^{*}(A)$)

当且仅当对于每一$a^{*} \in M^{*}$ ($a^{*} \vec{\in} M^{*}$),都有 $a^{*} \in \mathfrak{M}^{*}(A)$ ($a^{*} \vec{\in} \mathfrak{M}^{*}(A)$)

当且仅当对于每一$m \in M^{*}$ ($m \vec{\in} M^{*}$),都有 $m \in \mathfrak{M}^{*}(A)$ ($m \vec{\in} \mathfrak{M}^{*}(A)$)

当且仅当对于每一$m \in M^{*}$ ($m \vec{\in} M^{*}$),都有 $\mathfrak{M}^{*}(a_i/m)(a_i) \in \mathfrak{M}^{*}(a_i/m)(A)$ ($\mathfrak{M}^{*}(a_i/m)(a_i) \vec{\in} \mathfrak{M}^{*}(a_i/m)(A)$)

当且仅当对于每一$m \in M^{*}$ ($m \vec{\in} M^{*}$),都有 $\mathfrak{M}^{*}(a_i/m)(A(a_i)) = 1$

定理 7.16 设 Σ 是 PIMS 公式集,A 是 PIMS 公式. 则:

(1) 如果 Σ 是协调的,则 Σ 是可满足的;

(2) 如果 A 是协调的,则 A 是可满足的.

证明

(1) 如果 Σ 是协调的,那么根据定理 7.12,Σ 能扩充为 $PIMS^{+}$ 中具有存在性质潜在性极大协调集 Σ^{*},根据定理 7.15,Σ 在 F^{PIN} 模型 $\mathfrak{M}^{*}$ 下是可满足的.

(2) 是(1)的特殊情形.

定理 7.17(F^{PIN} 完全性定理) 设 Σ 是 PIMS 公式集,A 是 PIMS 公式.

(1) 如果 $\Sigma \models A$,那么 $\Sigma \vdash A$;

(2) 如果 $\varnothing \models A$,那么 $\varnothing \vdash A$.

证明

(1) 如果 $\Sigma \nvdash A$,那么 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 是协调的,那么根据定理 7.16,$\Sigma \cup \{\neg A\}$ 是可满足的,即存在模型 $\mathfrak{M}$,使得 $\mathfrak{M}(\Sigma \cup \{\neg A\}) = 1$,也即存在模型 $\mathfrak{M}$,使得 $\mathfrak{M}(\Sigma) = 1$ 且 $\mathfrak{M}(\neg A) = 1$,所以,存在模型 $\mathfrak{M}$,使得 $\mathfrak{M}(\Sigma) = 1$ 且 $\mathfrak{M}(A) = 0$,因此,$\Sigma \nvDash A$.

(2) 是(1)的特殊情形.

7.4 潜无限数学系统(Ⅳ)——集合论基础

如上所知，在7.1节曾将潜无限数学系统简记为PIMS，而在7.2节和7.3节中，我们给出了PIMS的逻辑公理，亦即PIMS的逻辑演算系统.在本节中，我们将给出PIMS的非逻辑公理，亦即给出PIMS的公理集合论系统.为简便计，我们将PIMS的逻辑演算系统简记为PIMS-Ca，而将PIMS的公理集合论系统简记为PIMS-Se.

在PIMS-Se中，我们使用的逻辑工具是PIMS-Ca.

PIMS-Se的形式语言包括下列符号：

(1) 变元符号：x_1、x_2、x_3、…、x_n；

x_1'、x_2'、x_3'、…、x_n'；

(2) 谓词符号：一元谓词符号：FRig、PSpr；

二元谓词符号：$\in$、$\vec{\in}$；

其他谓词符号：F_1、G_1、H_1、…、F_n、G_n、H_n；

(3) 联结词符号：$\neg$、$\rightarrow$、$\wedge$、$\vee$、$\leftrightarrow$；

(4) 量词符号：$\forall$、$\exists$、E；

(5) 等词符号：$=$；

(6) 技术性符号：(、).

为了叙述方便，我们常用x、y、z表示x_1、x_2、x_3、…、x_n中任一个变元符号，常用x'、y'、z'表示x_1'、x_2'、x_3'、…、x_n'中的任一个变元符号，常用u、v、w(以及加下标的形式)表示任一个变元符号.

PIMS-Se中的任一公式用大写字母A、B、C等表示.PIMS-Se中的公式定义如下：

(1) 对于任一变元符号x，FRig(x)是公式；

对于任一变元符号x'，PSpr(x')是公式；

对于n个变元符号u，…，w和n元谓词符号G，$G(u,\cdots,w)$是公式；

(2) 对于任意变元符号u、v而言，$u=v$是公式；

对于任意变元x、y、x'、y'而言，$x\in y$、$x'\in y$、$x \vec{\in} y'$、$x' \vec{\in} y'$都是公式；

(3) 如果A、B是公式，那么$(\neg A)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\leftrightarrow B)$是公式；

(4) 如果$A(u)$是含有变元符号u的公式，并且u出现在形如$u\in y$

的公式中，那么 $\forall u A(u)$ 是公式；如果 $A(u)$ 是含有变元符号 u 的公式，那么 $\exists uA(u)$、$EA(u)$ 都是公式；

(5) 只有有穷次由上述规则得到的符号串才是公式.

括号省略规则如常.

直观地说：

(1) PIMS Se 中的变元符号有两类：

① 有穷刚性(rigid)集合变元 x，记为 $FRig(x)$；

② 潜无限弹性(spring)集合变元 x'，记为 $PSpr(x')$.

今后常用英文字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示任意有穷刚性集合，而用 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 表示任意潜无限弹性集合，又在一些 Wff 中，必要时也用 $\xi,\eta,\zeta,\cdots$ 表示某种情况下为有穷刚性集合，某种情况下为潜无限弹性集合，即为表达方便计，起到一种灵活表达的兼容性作用. 又规定 $FRig(x)$ 解释并读为"x 是有穷刚性集合"，$PSpr(x')$ 解释并读为"x' 是潜无限弹性集合".

(2) PIMS Se 中的二元常谓词有两个：

①"$\in$"，解释并读为"属于"

②"$\vec{\in}$"，解释并读为"包容于".

(3) 对于上述公式的形成规则而言，$x\in y'$、$x'\in y'$、$x\vec{\in} y$、$x'\vec{\in} y$ 都不是公式. 这就是说"属于"($\in$)仅用于刻画变元与有穷刚性集合之间的关系，而"包容于"($\vec{\in}$)仅用于刻画变元与潜无限弹性集合之间的关系.

(4) 全称量词 $\forall$ 仅限使用于 $FRig(a)$，因为在 PIMS-Se 中只有 $FRig(a)$ 才是完成式. 所以除此之外，一概使用量词 E.

公理(0)

(1) $ExFRig(x)$，

(2) $Ex'PSpr(x')$，

(3) $Eu(FRig(u)\leftrightarrow\neg PSpr(u))$，

(4) $EuEv(FRig(u)\wedge v\subset u\rightarrow FRig(v))$，

(5) $EuEv(PSpr(u)\wedge u\vec{\subseteq} v\rightarrow PSpr(v))$，

(6) $Eu(FRig(u)\wedge Ev(v\in u\rightarrow G(v))\rightarrow\forall v(v\in u\rightarrow G(v)))$.

实际上，本公理中的(4)、(5)并不具有独立性. 在其他公理之上，它们是相互可证的. 但是为了方便，我们均作为公理. 这种情况在本系统的其他公理中也存在. 例如，空集公理相对于其他公理也不是独立的.

公理(Ⅰ) 外延公理

(1) $EaEb(\forall u(u\in a\leftrightarrow u\in b)\rightarrow a=b)$;

(2) $E\alpha E\beta(Eu(u\overset{\rightarrow}{\in}\alpha\leftrightarrow u\overset{\rightarrow}{\in}\beta)\rightarrow\alpha=\beta)$.

定义 7.1

(1) $a\subseteq b =_{df} \forall u(u\in a\rightarrow u\in b)$,

(2) $a\subset b =_{df} a\subseteq b\wedge a\neq b$,

(3) $a\supseteq b =_{df} b\subseteq a$,

(4) $a\supset b =_{df} b\subset a$,

(5) $a\nsubseteq b =_{df} \neg a\subseteq b$,

(6) $a\not\subset b =_{df} \neg a\subset b$,

(7) $a\overset{\rightarrow}{\subseteq}\alpha =_{df} \forall u(u\in a\rightarrow u\overset{\rightarrow}{\in}\alpha)$,

(8) $a\overset{\rightarrow}{\subset}\alpha =_{df} a\overset{\rightarrow}{\subseteq}\alpha\wedge a\neq\alpha$,

(9) $\alpha\overset{\leftarrow}{\supseteq}a =_{df} a\overset{\rightarrow}{\subseteq}\alpha$,

(10) $\alpha\overset{\leftarrow}{\supset}a =_{df} a\overset{\rightarrow}{\subset}\alpha$,

(11) $a\overset{\rightarrow}{\nsubseteq}\alpha =_{df} \neg a\overset{\rightarrow}{\subseteq}\alpha$,

(12) $a\overset{\rightarrow}{\not\subset}\alpha =_{df} \neg a\overset{\rightarrow}{\subset}\alpha$,

(13) $\alpha\overset{\rightarrow}{\subseteq}\beta =_{df} Eu(u\overset{\rightarrow}{\in}\alpha\rightarrow u\overset{\rightarrow}{\in}\beta)$,

(14) $\alpha\overset{\rightarrow}{\subset}\beta =_{df} \alpha\overset{\rightarrow}{\subseteq}\beta\wedge\alpha\neq\beta$,

(15) $\alpha\overset{\leftarrow}{\supseteq}\beta =_{df} \beta\overset{\rightarrow}{\subseteq}\alpha$,

(16) $\alpha\overset{\leftarrow}{\supset}\beta =_{df} \beta\overset{\rightarrow}{\subset}\alpha$,

(17) $\alpha\overset{\rightarrow}{\nsubseteq}\beta =_{df} \neg\alpha\overset{\rightarrow}{\subseteq}\beta$,

(18) $\alpha\overset{\rightarrow}{\not\subset}\beta =_{df} \neg\alpha\overset{\rightarrow}{\subset}\beta$.

这些符号的读法如下：

$a\subseteq b$ 读作"a 包含于 b 中"，$a\subset b$ 读作"a 真包含于 b 中"，$a\supseteq b$ 读作"a 包含 b"，$a\supset b$ 读作"a 真包含 b"，$a\nsubseteq b$ 读作"a 并非包含于 b 中"，$a\not\subset b$ 读作"a 并非真包含于 b 中"；$a\overset{\rightarrow}{\subseteq}\alpha$ 读作"a 囿于 α 中"，$a\overset{\rightarrow}{\subset}\alpha$ 读作"a 真囿于 α 中"，$\alpha\overset{\leftarrow}{\supseteq}a$ 读作"α 囿 a"，$\alpha\overset{\leftarrow}{\supset}a$ 读作"α 真囿 a"，$a\overset{\rightarrow}{\nsubseteq}\alpha$ 读作"a 并非囿于 α 中"，$a\overset{\rightarrow}{\not\subset}\alpha$ 读作"a 并非真囿于 α 中"．其他公式的读法依此类推．

在此应注意，对于 FRig(a)、FRig(b)、PSpr(α)、PSpr(β)，亦即 a、b 是有穷刚性集合，α、β 是潜无限弹性集合，不可能出现诸如 $a\subseteq\alpha$、$\alpha\subseteq a$、$\alpha\subseteq\beta$、$a\overset{\rightarrow}{\subseteq}b$、$\alpha\overset{\rightarrow}{\subseteq}a$ 等情况，当然有如 $\exists x(x\overset{\rightarrow}{\in}\alpha\wedge x\in a)$ 等是完全合理的．

定义 7.2

(1) $\xi \neq \zeta =_{df} \neg(\xi = \zeta)$,

(2) $x \notin a =_{df} \neg(x \in a)$,

(3) $u \vec{\notin} \alpha =_{df} \neg(u \vec{\in} \alpha)$.

公理(Ⅱ) 空集公理

$\exists x \forall v(v \notin x)$.

定理 7.1 $Eu(\forall v(v \notin u) \rightarrow \mathrm{FRig}(u))$.

证明 假设 $\forall v(v \notin u)$,那么显然有 $Ev(v \in u \rightarrow v \in x_1)$,因此 $u \subseteq x_1$.根据公理(0)(1)知 $\mathrm{FRig}(x_1)$,再根据公理(0)(4)可得:$\mathrm{FRig}(u)$.

定理 7.2 存在唯一没有任何元素的集合.

证明 存在性根据空集公理显然成立.现只需证明唯一性.

假设 u_1、u_2 均为没有任何元素的集合,即

$\forall v(v \notin u_1)$ 且 $\forall v(v \notin u_2)$,根据定理 7.1 知 $\mathrm{FRig}(u_1)$ 且 $\mathrm{FRig}(u_2)$.由 $\forall v(v \notin u_1)$ 可得:$Ev(v \in u_1 \rightarrow v \in u_2)$,根据公理(0)(6)可得:$\forall v(v \in u_1 \rightarrow v \in u_2)$;由 $\forall v(v \notin u_2)$ 可得:$Ev(v \in u_2 \rightarrow v \in u_1)$,根据公理(0)(6)可得:$\forall v(v \in u_2 \rightarrow v \in u_1)$.因此有:$\forall v(v \in u_1 \leftrightarrow v \in u_2)$,根据外延公理(Ⅰ)(1)可得:$u_1 = u_2$.

定义 7.3 没有任何元素的集合记为 $\varnothing$,即 $\forall v(v \notin \varnothing)$.

由定理 7.1 可知:$\mathrm{FRig}(\varnothing)$.即 $\varnothing$ 为有穷刚性集合.

公理(Ⅲ) 对偶公理

$EuEv \exists a \forall w(w \in a \leftrightarrow w = u \vee w = v)$

公理(Ⅳ) 并集公理(初级形式)

(1) $EaEb \exists c \forall u(u \in c \leftrightarrow u \in a \vee u \in b)$,

(2) $E\alpha E\beta \exists \gamma Eu(u \vec{\in} \gamma \leftrightarrow u \vec{\in} \alpha \vee u \vec{\in} \beta)$,

(3) $EaE\beta \exists \gamma Eu(u \vec{\in} \gamma \leftrightarrow u \in a \vee u \vec{\in} \beta)$.

公理(Ⅴ) 幂集公理

(1) $Ea \exists b \forall u(u \in b \leftrightarrow u \subseteq a)$,

(2) $E\alpha \exists \beta Eu(u \vec{\in} \beta \leftrightarrow u \vec{\subseteq} \alpha)$.

公理(Ⅵ) 子集公理

(1) $Ea \exists b \forall u(u \in b \leftrightarrow u \in a \wedge$ ____ $)$,

(2) $E\alpha(\exists b \forall u(u \in b \leftrightarrow u \vec{\in} \alpha \wedge$ ____ $) \vee \exists \beta Eu(u \vec{\in} \beta \leftrightarrow u \vec{\in} \alpha \wedge$ ____ $))$.

定理 7.3

(1) $Ea \exists ! b \forall u(u \in b \leftrightarrow u \in a \wedge$ ____ $)$,

(2) $E\alpha(\exists!b\forall u(u\in b\leftrightarrow u\vec{\in}\alpha\wedge$_____$)\vee\exists!\beta Eu(u\vec{\in}\beta\leftrightarrow u\vec{\in}\alpha\wedge$_____$))$.

定理 7.4

(1) 对于任一非空集合 a,存在唯一的集合 c 恰含有属于 a 的任一元素的任一元;

(2) 对于任一非空集合 α,存在唯一的集合 c 恰含有包容 α 的每个元素的任一元;

(3) 对于任一非空集合 α,存在唯一的集合 β 恰含有包容 α 的每个元素的任一元.

证明

(1) 因为 a 非空,可在属于 a 的集合中任取一元 b,根据定理 7.3 存在唯一的集合 c,

$$c=\{u:u\in b\wedge\forall v(v\in a\rightarrow u\in v\vee u\vec{\in}v)\}$$

$$=\{u:\forall v(v\in a\rightarrow u\in v\vee u\vec{\in}v)\}$$

(2)、(3) 证明略.

定义 7.4

(1) 设 $a\neq\varnothing$,令 $\bigcap a=\{u:\forall v(v\in a\rightarrow u\in v\vee u\vec{\in}v)\}$;

(2) 设 $\alpha\neq\varnothing$,令 $\bigcap\alpha=\{u:\forall v(v\vec{\in}\alpha\rightarrow u\in v\vee u\vec{\in}v)\}$.

公理(Ⅶ)　并集公理(高级形式)

(1) $Ea(\forall u(u\in a\rightarrow \mathrm{FRig}(u))\rightarrow\exists b\forall v(v\in b\leftrightarrow\exists u(u\in a\wedge v\in u)))$;

(2) $Ea(\forall u(u\in a\rightarrow \mathrm{PSpr}(u))\rightarrow\exists\beta Ev(v\vec{\in}b\leftrightarrow\exists u(u\in a\wedge v\vec{\in}u)))$;

(3) $Ea(\exists u(u\in a\wedge\mathrm{FRig}(u))\wedge\exists u(u\in a\wedge\mathrm{PSpr}(u))\rightarrow\exists\beta Ev(v\vec{\in}\beta\leftrightarrow\exists c(c\in a\wedge v\in c)\vee\exists\gamma(\gamma\in a\wedge v\vec{\in}\gamma)))$;

(4) $E\alpha(Eu(u\vec{\in}\alpha\rightarrow\mathrm{FRig}(u))\rightarrow\exists\beta Ev(v\vec{\in}\beta\leftrightarrow\exists u(u\vec{\in}\alpha\wedge v\in u)))$;

(5) $E\alpha(Eu(u\vec{\in}\alpha\rightarrow\mathrm{PSpr}(u))\rightarrow\exists\beta Ev(v\vec{\in}\beta\leftrightarrow\exists u(u\vec{\in}\alpha\wedge v\vec{\in}u)))$;

(6) $E\alpha(\exists u(u\vec{\in}\alpha\wedge\mathrm{FRig}(u))\wedge\exists u(u\vec{\in}\alpha\wedge\mathrm{PSpr}(u))\rightarrow\exists\beta Ev(v\vec{\in}\beta\leftrightarrow\exists c(c\vec{\in}\alpha\wedge v\in c)\vee\exists\gamma(\gamma\vec{\in}\alpha\wedge v\vec{\in}\gamma)))$.

定义 7.5 集合 u,它的后继 u^{+} 被定义为

$$u^{+}=u\cup\{u\}.$$

定义 7.6 集合 u 是一归纳集,当且仅当

(1) $\varnothing \in u$;

(2) $\mathrm{E}v(v \overset{\rightarrow}{\in} u \rightarrow v^{+} \overset{\rightarrow}{\in} u)$.

记为 $\mathrm{Ind}(u)$.

公理(Ⅷ) 无穷公理

$$\exists u(\varnothing \overset{\rightarrow}{\in} u \wedge \mathrm{E}a(a \overset{\rightarrow}{\in} u \rightarrow a^{+} \overset{\rightarrow}{\in} u)).$$

该公理指的是无条件承认分别以 $\varnothing$ 为始元的潜无限归纳集的存在性.

定理 7.5 若 u 为一非空的归纳集的集合,则 $\bigcap u$ 也是一归纳集.

定理 7.6 存在一唯一的包含在每一个归纳集中的归纳集.

定义 7.7 $\mathrm{E}u(\mathrm{Ind}(u) \rightarrow \omega \overset{\rightarrow}{\subseteq} u)$.

定义 7.8 $\mathrm{E}u(\omega \overset{\rightleftarrows}{\subseteq} u \leftrightarrow \mathrm{PSpr}(u))$.

在 PIMS-Se 中,a 是有穷刚性集合,因此 a 的后继 a^{+} 仍为有穷刚性集合,于是 a^{+} 的后继 $a^{++}=a^{+}\cup\{a^{+}\}$ 仍为有穷刚性集合,以此类推 …,总有 $a^{\overbrace{+\cdots+}^{n\text{个}}}$ 仍为有穷刚性集合. 另一方面,由 a 开始不断地构造 a 的后继,后继的后继,…,可以无止境地构造下去,而且这种构造一个后继,再构造一个后继的手续,当然是一种枚举手续,在 PIMS-Se 中,由于完全排斥实无限,所以对任何枚举手续在系统内都不存在穷举该枚举手续的事. 因此由 a 开始的无止境的构造后继的枚举手续形成一个潜无限弹性集合如下:

$$\{a, a^{+}, a^{++}, \cdots, a^{\overbrace{+\cdots+}^{n\text{个}}}\}.$$

在 PIMS-Se 中,因有 $\mathrm{FRig}(\varnothing)$,类同于上文所论,亦可获得由 $\varnothing$ 开始的弹性集合

$$\{\varnothing, \varnothing^{+}, \varnothing^{++}, \cdots, \varnothing^{\overbrace{+\cdots+}^{n\text{个}}}\}.$$

现设有潜无限弹性集合 α,则完全类同地,α 的后继 α^{+} 被定义为 $\alpha^{+}=\alpha\cup\{\alpha\}$,由于 α 是潜无限弹性集合,则 α^{+} 亦为潜无限弹性集合,总之,应有 $\alpha, \alpha^{+}, \cdots, \alpha^{\overbrace{+\cdots+}^{n\text{个}}}$ 等均为潜无限弹性集合. 类同于上文所论,我们亦可有由 α 开始的弹性集合

$$\{\alpha, \alpha^{+}, \alpha^{++}, \cdots, \alpha^{\overbrace{+\cdots+}^{n\text{个}}}\}.$$

定义 7.9 (1) 如果潜无限弹性集合 α 满足如下条件:

①$\varnothing \vec{\in} \alpha$;

②$Ea(a \vec{\in} \alpha \to a' \vec{\in} \alpha)$，则称 α 为以 $\varnothing$ 为一个始元的潜无限归纳集.

(2) 如果潜无限弹性集合 α 满足如下条件：

①$a \vec{\in} \alpha$;

②$Eb(b \vec{\in} \alpha \to b' \vec{\in} \alpha)$，则称 α 为以 a 为一个始元的潜无限归纳集.

(3) 如果潜无限弹性集合 α 满足如下条件：

①$\beta \vec{\in} \alpha$;

②$E\gamma(\gamma \vec{\in} \alpha \to \gamma' \vec{\in} \alpha)$，则称 α 为以 β 为一个始元的潜无限归纳集.

今后特称条件 $Ea(a \vec{\in} \alpha \to a' \vec{\in} \alpha)$ 和 $E\gamma(\gamma \vec{\in} \alpha \to \gamma' \vec{\in} \alpha)$ 为后继下可包容.

公理(Ⅸ)　选择公理

(1) $Ea(a \neq \varnothing \wedge \forall u(u \in a \to u \neq \varnothing) \wedge \forall u \forall v(u \in a \wedge v \in a \wedge u \neq v \to u \cap v = \varnothing) \to \exists b \forall w(w \in b \leftrightarrow \exists u(u \in a \wedge (w \in u \vee w \vec{\in} u) \wedge u \cap b = \{w\})))$;

(2) $E\alpha(Eu(u \vec{\in} \alpha \to u \neq \varnothing) \wedge EuEv(u \vec{\in} \alpha \wedge v \vec{\in} \alpha \wedge u \neq v \to u \cap v = \varnothing) \to \exists \beta Ew(w \vec{\in} \beta \leftrightarrow \exists u(u \vec{\in} \alpha \wedge (w \in u \vee w \vec{\in} u) \wedge u \cap \beta = \{w\})))$.

公理(Ⅹ)　替换公理

(1) $Ea(\forall u \forall v_1 \forall v_2(u \in a \wedge \varphi(u,v_1) \wedge \varphi(u,v_2) \to v_1 = v_2) \to \exists b \forall v(v \in b \leftrightarrow \exists u(u \in a \wedge \varphi(u,v))))$，此处 b 不在 $\varphi(u,v)$ 中出现;

(2) $E\alpha(\forall u \forall v_1 \forall v_2(u \vec{\in} \alpha \wedge \varphi(u,v_1) \wedge \varphi(u,v_2) \to v_1 = v_2) \to \exists \beta Ev(v \vec{\in} \beta \leftrightarrow \exists u(u \vec{\in} \alpha \wedge \varphi(u,v))))$，此处 b 不在 $\varphi(u,v)$ 中出现.

公理(Ⅺ)　正则公理

(1) $Ea(a \neq \varnothing \to \exists u(u \in a \wedge u \cap a = \varnothing))$;

(2) $E\alpha \exists u(u \vec{\in} \alpha \wedge u \cap \alpha = \varnothing)$.

定义 7.10　一个公式 A 的一个翻译 A^* 当且仅当按下列规则生成：

(1) $(\mathrm{FRig}(x))^* = x$ 是不加撇的变元符号;

(2) $(\mathrm{PSpr}(x'))^* = x'$ 是加撇的变元符号;

(3) $((G(u,\cdots,w))^* = G(u,\cdots,w)$;

(4) $(u = v)^* = u = v$;

(5) $(x \in y)^* = x \in y$;

(6) $(x' \in y)^* = x' \in y$;

(7) $(x \vec{\in} y')^* = x \in y'$;

(8) $(x' \vec{\in} y')^* = x' \in y'$;

(9) $(\neg A)^* = (\neg A^*)$;

(10) $(A \to B)^* = (A^* \to B^*)$;

(11) $(A \wedge B)^* = (A^* \wedge B^*)$;

(12) $(A \vee B)^* = (A^* \vee B^*)$;

(13) $(A \leftrightarrow B)^* = (A^* \leftrightarrow B^*)$;

(14) $(\forall u A(u))^* = \forall u (A(u)^*)$;

(15) $(\exists u A(u))^* = \exists u (A(u)^*)$;

(16) $(EuA(u))^* = \forall u (A(u)^*)$;

定理 7.7 如果 A 是 PIMS-Se 中的定理，则 A^* 是公理集合论系统 ZFC 的定理.

证明 施归纳于 PIMS-Se 中定理证明的长度可证. 略.

定理 7.8 如果公理集合论系统 ZFC 是相容的，则潜无穷集合论系统 PIMS-Se 是相容的.

证明 假设潜无穷集合论系统 PIMS-Se 不是相容的. 则一定存在公式 A，使得 A 和¬A 都是系统 PIMS-Se 中的定理. 由定理 7.7 可得，A^* 和 $\neg A^*$ 都是公理集合论系统 ZFC 的定理，那么公理集合论系统 ZFC 是不相容的.

如所知，古典集合论悖论的出现，导致了近代公理集合论的发展. 而近代公理集合论在相容性的问题上所取得的成效可归结为如下两点：其一，对于历史上既经出现的二值逻辑悖论，都能在近代公理集合论系统中给出解释方法，即不可能在系统内出现；其二并没有在理论上证明近代公理集合论中今后一定不会出现新的悖论. 另一方面，迄至目前为止，所出现的逻辑数学悖论可归结为如下三种类型：

(1) 二值逻辑悖论；

(2) 多值逻辑悖论，其中包括有穷值($3 \leqslant n < \omega$)逻辑悖论和无穷值逻辑悖论；

(3) 无穷观悖论，即指 6.3 节中的潜无限等于实无限和潜无限不等于实无限的隐性矛盾，6.7 节中所说之极限论中的贝克莱悖论的阴影，还有 6.4 节、6.5 节、6.8 节中之可数与不可数无穷集合概念中的不相容性. 在此可以明确指出：

(1) 历史上既经出现之二值逻辑悖论不可能在 PIMS-Se 中出现,否则,假设有某个二值逻辑悖论在 PIMS Se 中出现,则由定理 7.8 可知,该二值逻辑悖论必将在近代公理集合论中出现,这与历史上已有的结论相悖;

(2) 由于 PIMS Se 配套的逻辑推理工具是修正了的二值逻辑演算,因此,在二值逻辑演算框架下,无需对任何有穷值($3 \leqslant n < \omega$)或无穷值悖论作出解释;

(3) 由于 PIMS Se 完全不兼容实无限,因此亦不存在潜无限与实无限相等或不相等的问题,也不存在肯定完成式(T)与否定完成式(T̸)并列的问题. 因此,如上文所列之各种无穷观悖论都不可能在 PIMS-Se 中出现.

因此,PIMS Se 在相容性问题上所取得的成效可以认为与近代公理集合论在相容性问题上所取得之成就正好相当.

7.5 谓词与无穷集合之间的无穷观问题

7.5.1 数集与区间中变量趋向极限的表示法

如所知,我们常以$[a,b]$表示一个闭区间,此时区间端点 a 和 b 在区间内. 而开区间通常被记为(a,b),表示端点 a 和 b 在区间外,为了更直观和贴切地表示 a 和 b 在区间外,应将开区间(a,b)记为 $a(,)b$,实际上,从某种意义上讲开区间没有端点. 总之,"$b]$"表示 b 点在内,而"$)b$"表示 b 点在外. 我们规定,如果变量 x 无限趋近于其极限 b,并且最终达到极限 b(gone),则称变量 x 以实无限方式趋向其极限 b. 又若变量 x 无限趋近于其极限 b,但却永远达不到极限 b(going),则称变量 x 以潜无限方式趋向其极限 b. 如此,对于任何变量 x 趋向其极限的方式而言,要么以潜无限方式趋向其极限,要么以实无限方式趋向它的极限.

现在,让我们来分析变量 x 在闭区间$[a,b]$内沿 X 轴朝向 b 点无限趋近其极限 b 的情形. 由于 b 点在区间内,所以变量 x 不仅可以无限趋近其极限 b,而且变量 x 在区间内可以达到极限 b. 从而此时变量 x 在区间内按实无限方式趋向它的极限 b. 然而变量 x 在开区间 $a(,)b$ 内沿着 X 轴朝向 b 而无限趋近其极限 b 时,变量 x 虽然可以无限趋近 b 点并以 b 点为其极限,但因点 b 在区间外,因而变量 x 在区间内永远达不到极限 b,从

而变量 x 在区间内只能以潜无限方式趋向其极限 b. 这表明在闭区间的情况下,生成变量 x 趋向其极限 b 的过程是完成式,而在开区间的情况下,生成变量 x 趋向其极限 b 的过程却是现在进行式. 在这里,"$b]$"的表示方法,既体现了极限点 b 在区间内,从而可达到,又体现了封闭和完成式. 对于"$)b$"的表示方法,一方面体现出极限点 b 在区间外,从而不可达到,另一方面又体现出开放和进行式. 所以关于 b 点在区间的方括号内"$b]$"和圆括号外"$)b$"这两种关于实无穷与潜无穷的表示方法是合理的,依次体现了实无限性和潜无限性. 相反地,有如"$]b$"和"$b)$"的表示方法却是不合理的. 因为前者(即在方括号外)显示了封闭完成(gone)与在外不可达(going)的矛盾式,后者(即在圆括号内)显示了开放进行(going)与在内可达(gone)的矛盾式.

关于区间,除了上述闭区间$[a,b]$和开区间 $a(,)b$ 之外,当然还可有如半开区间$[a,)b$,无穷闭区间$[a,+\infty]$以及无穷半开区间$[a,)+\infty$等各种不同的形式. 下文让我们在两种无穷的区间表示法基础上,进一步分析两种无穷的数集表示法. 我们曾在 6.5.1 与 6.5.2 中论及实无限刚性自然数集 $N=\{x \mid n(x)\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}\omega$ 和潜无限弹性自然数集 $\mathcal{N}=\{x \mid n(x))=\{1,2,\cdots)\omega$. 于是此处对于区间与数集中相关符号的合理对应势必为区间的方括号"]"对应于数集的花括号"}",事实上,两者都是封闭完成式,又区间的圆括号")"应对应于数集的圆括号")",两者都是开放进行式,如此剩下的当然是区间的 $+\infty$ 对应于数集的 ω,两者都是被变量无限趋近的极限.

在这里,我们注意到古典集合论与近代公理集合论意义下的实无限刚性自然数集合 $N=\{x \mid n(x)\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}\omega$ 中的记法"$\}\omega$",正好相当于区间记法中的"$]+\infty$". 然而根据上文所论可知,"$]+\infty$"的记法正好是不合理的. 因为"$]+\infty$"的记法体现了封闭完成与在外不可达的矛盾式. 从而在数集$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}\omega$ 中关于"$\}\omega$"记法也是一种矛盾式的不合理记法,而"$\}\omega$"这种记法的不合理性和矛盾式,也从一个侧面反映了恰由全体自然数构成的实无穷刚性自然数集合的不相容性. 然而由于古典集合论和近代公理集合论中的一些思想规定,又迫使人们不能不采用"$\}\omega$"这一不合理记法. 因为在古典集合论和近代公理集合论中有如下两条熟知的定理:

定理 1　全体自然数构成的集合 N 共有 ω 个两两相异的自然数.

定理 2　全体自然数都是有限序数,因此所有自然数都小于 ω,即对任何自然数 n 都有 $n<\omega$.

从而首先由定理1知自然数集 N 是一个完成了的实无限刚性集合，所以 $N=\{x\mid n(x)\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 的右侧必须使用花括号"}"，不可能用潜无限弹性自然数集合 $\mathscr{N}=\{x\mid n(x))=\{1,2,\cdots,\tilde{n})$ 右侧的圆括号")"取代，其次由于超限序数 ω 不是有限序数，所以由定理2知必须将 ω 置于花括号之外，从而必然出现"$\}\omega$"这一封闭完成与在外不可达的矛盾式的不合理表示法. 所以在古典集合论和近代公理集合论中出现"$\}\omega$"这种不合理的矛盾式的记法是必然的.

如此看来，相应于闭区间 $[a,b]$ 内变量 x 趋向其极限 b 的实无限完成式的表示方法，实无限刚性自然数集合的合理记法应该是 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots,\omega\}$. 而相应于开区间 $a(,)b$ 内变量 x 趋向其极限 b 的潜无限进行式的表示方法，潜无限弹性自然数集集合的合理记法应该是 $\mathscr{N}=\{1,2,\cdots,\tilde{n})\omega$. 正因为从闭区间内变量 x 趋向极限 b 到开区间内变量 x 趋向极限 b 的这个转换，正好是由变量趋向极限的实无限方式到变量趋向极限的潜无限方式的转换，又从转换过程的表示方法来看，正好是方括号"]"变成圆括号")"以及将极限点 b 从方括号内取出置于圆括号外. 从而按上文所论之区间与数集表示方法的对比分析，可知当我们从实无限刚性自然数集合的合理记法 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots,\omega\}$ 中将 ω 取出而置于括号外时，右边的花括号"}"必须转换为圆括号")"，并且此处变量 n 趋向极限 ω 的实无限方式由此而转换为趋向极限的潜无限方式. 因此，由上述关于区间与数集表示方法的对比分析中可有如下重要结论：

(△) 当我们从实无限刚性自然数集合的合理记法 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots,\omega\}$ 中将 ω 取出之后，则 N 必须转换为潜无限弹性自然数集合 $\mathscr{N}=\{x\mid n(x))=\{1,2,\cdots,\tilde{n})$. 不可能再是那个通常认为的实无限刚性自然数集合 $N=\{x\mid n(x)\}=\{1,2,\cdots,n\cdots\}$.

上述重要结论(△)是由区间与数集表示方法的对比分析中得到的，其实从认识论与科学哲学的普遍规律中也能分析出上述重要结论(△)是合理的. 因为自然数 n 是有限序数，而 ω 是超限序数，所以 n(有限)与 ω(超限)是一组反对对立面，又由于实无限必须是完成式，而完成式就是完成了对立面的转化，在这里就是完成了从有限(n)到超限(ω)的转化，这一转化的完成要体现出 $N=\{1,2,\cdots,n,\cdots,\omega\}$ 的形成. **现在若将 ω 从 N 中取出，这表示我们又将完成式回复到未完成式，未完成式就是现在进行式，从而也就是将体现实无限的刚性自然数集合 N 回复到体现潜无限的弹性自然数集合 $\mathscr{N}$.** 但在传统的层面上，都认为从 N 中将超限数 ω 取出的内涵完全等同于从 N 中取出一个有限序数 n 的内涵. 所

以普遍认为，我们可以先将自然数由小到大排列起来，并且一直排到 ω，因而就已经排出了所有自然数，当然是完成式，然后再将 ω 去掉，而这时留下的仍然是所有的自然数，所以仍然是全体自然数构成的实无限刚性自然数集合. 从而与上文所获之重要结论(△)大相径庭和互不相容. 我们认为如上的哲学分析是合理的，关于数集与区间的类比分析是非常直观和自然的. 当然，直观的东西可能不足为据，我们要的是理性思维的结论，然而不妨让我们想一想，有哪一个理性思维系统的实际背景和客观模型能离开直观的经验思维，至多只是直观经验思维的具体层面会有差别而已，即有时某一层面的理性思维可以成为更高层面的理性思维的直观模型. 当然，从理性思维的角度来看如上的类比和直观分析应该认为是粗糙的，就闭区间和开区间而言，我们的直观思维的基础，仅在于变量 x 沿着 X 轴在区间内朝向 b 不断地移动过去，因在闭区间的情况下，点 b 在区间内，所以变量 x 能一直移到 b 点，而在开区间的情况下，b 点在区间外，所以肯定 x 只能无限地靠近 b 点，却永远达不到 b 点. 对于实无限刚性自然数集合和潜无限弹性自然数集合也是一样，让我们沿着自然数由小到大的方向走下去，先走到 ω 再说，回头再把超限数 ω 去掉，传统层面上的实无限刚性自然数集合就这样被构造出来了. 其实真正从理性思维的角度去深入思考时，无论是变量 x 移到极限点 b，还是自然数变量 n 走到极限序数 ω，都是一个非常复杂的过程. 而且当 n 走到 ω 之后再将 ω 去掉一事，绝不是想像中那么简单和轻而易举，在这里，同样是一件相当复杂的事. 我们将在下文中立足于理性思维的层面去分析讨论其中的复杂情况.

7.5.2 实无穷刚性自然数集合与中介过渡

如所知，在 5.4 节和 5.5 节中所讨论的中介逻辑演算系统和中介公理集合论系统(下文简称为中介系统)中，曾引进了形式符号对立否定词ㅋ，解释并读为"对立于"，模糊否定词 $\sim$，解释并读为"部分地". 从而任给谓词 P，则 P 的反对对立面记为ㅋP. 例如设有谓词 P:"男人"，则其反对对立面"女人"应记为ㅋP. 通常 $P(x)$ 表示对象 x 完全满足谓词 P，从而 $\sim P(x)$ 表示对象 x 部分地满足 P，而ㅋ$P(x)$ 表示对象 x 完全满足 P 的反对对立面，此外，在中介系统中任给反对对立面 P 和ㅋP，若有对象 x 部分地满足 P，同时又部分地满足ㅋP，则称 x 为该反对对立面的中介对象，简记为 $\sim P(x)$.

如所知，在中介系统的建立和展开中，必须在无形中自始至终地贯彻"中介原则"的精神，所谓中介原则，即指无条件承认有中介对象的反对对立面是客观存在的，然而中介原则并不主张所有的反对对立面都有中介对象，只主张并非所有的反对对立面都没有中介对象. 事实上在认识论和科学哲学中就有一条普遍而重要的原则，那就是对立面的相互转化过程总要经过"亦此亦彼"的中介过渡状态，而"亦此亦彼"的中介状态，就是指既是对立面的此方，又是对立面彼方的一种状态. 例如黎明就是黑夜转化到白昼的中介状态，0 就是亦正亦负的中性数，如此等等. 因而所说的认识论中的这一条普遍而重要的原则，也就是中介系统中之中介原则的哲学背景. 反之，中介系统中所说的反对对立面的中介对象，也就是认识论中所述之"亦此亦彼"的中介状态在中介系统中的一个具体实现.

现在让我们在中介原则的基础上，分析讨论区间中变量 x 移向极限 b 和自然数集 N 中变量 n 移向极限 ω 的复杂过程. 事实上，有限序数 n 与超限序数 ω 就是"有限"与"实无限"这个反对对立面的一个具体模型. 如此，从中介过渡的角度看，对立的此方不经过它们的中介状态如何能转化到对立的彼方去呢？而且有穷序数与超穷序数的中介对象是什么？首先从哲学上讲，潜无限是有限与实无限这一反对对立面的中介. 因为潜无限是非有限，从而具备了通向实无限的可能性，因而部分地具有实无限的性质，反之，由于潜无限永远是现在进行式，并且永远达不到实无限，从而并没有完全超脱有限，所以它又部分地具有有限的性质. 其次从数学的角度讲，那个潜无限弹性自然数集 $N = \{x \mid n(x)\} = \{1, 2, \cdots, \dot{n}\}$ 中的那个可以无限增大的不固定的末元 $\dot{n}$ 就是有限序数 n 与超限序数 ω 的中介状态. 因为 $\dot{n}$ 可以无限制地增大，所以它就部分地具有超限数的性质，然而在 $\dot{n}$ 无限制地增大的进程中又要求恒保持小于 ω 的性质，从而又部分地具有有穷序数的性质.

但在古典集合论和近代公理集合论中，一个谓词唯一决定一个（实无限刚性）集合的思维模式将对立面相互转化过程中的中介过渡现象完全简化掉了，当然，这也是经典二值思维模式的必然结果. 同时也在这种简化的思维模式下，将鲁宾逊（Robinson）认为没有意义的实无穷集合的表达式 $\{x \mid P(x)\}$ 完全合法化，并为人们所普遍接受. 在这里，也正因为不能与对立物之中介过渡思想有机地结合起来，以致认可了"先让自然数变量 n 走到 ω 再把 ω 去掉"的方式去产生实无限刚性自然数集合 N 的合理性. 但从中介过渡的角度看，情况是远较复杂的，事实上，在那个完成了的实无穷自然数集中，对于 ω 的取出和投入已不能和取出或投入

一个普通自然数 n 那样同等看待了. 另一方面，在古典集合论和近代公理集合论中，一个谓词唯一确定一个集合的原则主要体现在如下的思想规定：这就是任给造集谓词 P，则就能将所有完全满足该谓词的对象汇成一个整体或集合，通常记为 $\{x \mid P(x)\}$，而且该集合一经形成，就成为一个独立的研究对象，并具有其自身的质的规定性，特别是该独立存在物纯粹由(即由且仅由)具有性质 P 的对象构成. 然而，科学哲学却认为，当规定某物为界限时，就已经在超出这个界限了，亦即当我们肯定某物的质的规定性时，就已经在否定它的质的规定性了，绝对的纯是没有的. 因此，当我们将某一类具有性质 P 的对象全部收集拢来而形成一个单体的研究对象时，就已经在超出形成这一单体对象的那些量性对象的质的规定性了. 例如，就自然数一类对象而言，同样是一个超越其自身界限而不能单纯自封的系统，亦即当我们将自然数一类对象全部收集拢来而形成 λ 序列时，就已经在超出形成 λ 序列的那些自然数(有限序数)的质的规定性了. 按照这一认识论原则，λ 序列一经形成，必将有不同于自然数的量性对象包括在其中了. 然而康托本人及其往后的一系列研究，却长期以来不能意识到这一点而滞留于传统的 $\{x \mid P(x)\}$ 的集概念中. 须知我们所讨论的是实无限的刚性集合，亦即要将无穷多个对象汇集起来构成一个完成了的单体研究对象，这就既不可能像构成一个有穷集合那样去一个一个地罗列它的元素，也不可能像潜无限的弹性集合那样永远滞留于将对象不断地包容进来的进程中，而势必要通过质的规定性才能去完成这个汇集全体对象的过程，而质的规定性又必然要在肯定的同时进入否定自己的前提下才能构成某物的存在. 从而过去那种只着眼于刚性无穷集合的元素，而缺乏使元素汇成整体这一环节的哲学思考，乃是造成片面性的根本原因.

我们将在下文中立足于上述科学哲学原则和中介过渡思想基础上，进一步讨论实无穷刚性集合的内涵与结构.

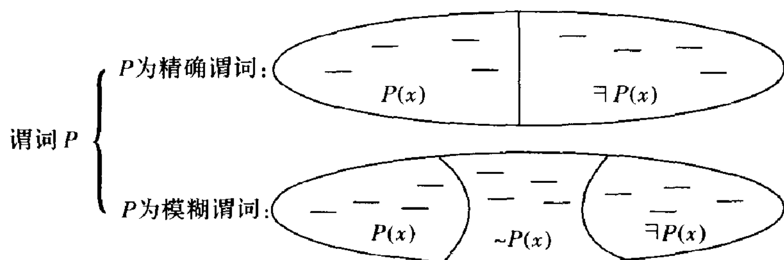
7.6 实无限刚性集合的内涵与结构

7.6.1 无穷背景世界中的谓词与集合之间的关系

为了在中介过渡思维模式下，进一步弄清楚无穷背景世界中谓词与集合的关系，首先要从谓词 P:“自然数”这一特例抽象到任意的谓词 P，

而且要从康托(Cantor)意义下用以造集的精确谓词推广到模糊谓词. 其次还要将有穷序数与超穷序数这一特殊的反对对立面推广到一般的反对对立面 P 和╕P.

如所知,在中介系统中,曾给出了精确谓词和模糊谓词的形式定义,并且证明了这两种谓词满足排中律(在此应注意中介原则并不主张所有反对对立面都有中介),因此任给谓词 P,则 P 要么是精确谓词,要么是模糊谓词. 并且对于精确谓词而言,不存在对象 x 能使有 $\sim P(x)$. 又对于模糊谓词而言,必有对象 x 部分地满足该谓词,即有 x 使有 $\sim P(x)$,并可图示如下:



注意在中介系统中,形式符号 $\sim$ 的名称是模糊否定词,解释并读为"部分地". 又形式符号╕的名称是对立否定词,解释并读为"对立于". 因此 $P(x)$ 表示对象 x 完全具有性质 P,$\sim P(x)$ 表示对象 x 部分地具有性质 P,而╕$P(x)$ 表示对象 x 具有性质对立于 P,因此任给反对对立面(P,╕P),如果有对象 x 满足 $\sim P(x) \wedge \sim$ ╕$P(x)$,则称 x 为(P,╕P)的中介对象.

在此值得注意一点,虽然精确谓词和模糊谓词在中介系统中都有形式定义,但是任给谓词 P,该谓词究竟是精确谓词还是模糊谓词,仍然决定于直观经验,或说由人主观认定. 例如对于"自然数"(或"有穷序数")这一谓词而言,通常都认为是精确谓词,因为从直观上似乎找不到对象能使其部分地具有"自然数"这一性质,或者说在标准分析的传统思维方式下,对于"自然数"这一谓词 P 而言,都认为没有 x 能使有 $\sim P(x)$,又设有谓词 P:"美男子",大家立即认为这是模糊谓词,因为生活中肯定有对象 x 能使有 $\sim P(x)$. 这些判断实际上都来自直观的经验思维,但从理性思维的角度看,就"自然数"或"有穷序数"这一谓词而言,为什么就一定没有对象 x 能使有 $\sim P(x)$?实际上,在理性思维不断外推和抽象的情况下,可能会发现使有 $\sim P(x)$ 的对象 x 也是存在的,例如,在非标准分析中,将实数域 R 扩充为 $^*R$ 之后,在 $^*R$ 中就有对象 x 能使有 $\sim P(x)$,所以在理性思维的层面上,更重要的是讨论模糊谓词的情况. 实际上,只

有在实际问题中，不需要考虑 $\sim P(x)$ 时，才将谓词 P 设定为精确谓词. 另一方面，设 P 为一谓词，则 P、$\sim P$、$\exists P$ 有时也可按实际情况分别视为一个独立谓词，例如设有谓词 P:“男人”，则 $\exists P$ 亦可视为一独立谓词 P': “女人”，又 $\sim P$ 可视为某个独立谓词 P'':“中性人”.

大家知道，在古典集合论和近代公理集合论中，有一条著名原则，那就是一个谓词唯一决定一个集合. 而且在上述传统集合论中，任何造集谓词都是精确谓词，亦即模糊谓词既不是其研究对象，更扯不上用来造集了. 另外，任何无穷集合都是完成了的实无穷集合，亦即在那里既不谈潜无限，更扯不上什么潜无限弹性集合之类. 但在我们这里，却既要论及潜无限弹性集合，又要论及实无限刚性集合. 当然，对于任何有穷集合而言，全是刚性集合. 在这里，我们郑重声明一点，即任何有穷集合都不是下文中所研究的内容，亦即下文所讨论的集合，要么是潜无限弹性集合，要么是实无限刚性集合. 在这里，我们将完全改变上述传统集合论中所论及的著名原则，重新建立一条有关谓词与集合之间的关系的原则，其内涵有如下两点：

(1) 一个精确谓词能且只能确定一个一意确定的潜无限弹性集合.

(2) 一个模糊谓词既能确定一个一意确定的实无限刚性集合；同时也可用以确定一个一意确定的潜无限弹性集合.

上述原则表明，任给一个谓词，不论该谓词是精确谓词还是模糊谓词，总能用来唯一确定一个潜无限弹性集合. 但是精确谓词不能用以确定任何实无限刚性集合，只有模糊谓词才能唯一确定一个实无限刚性集合，或者说任何实无限刚性集合必须由模糊谓词一意确定.

我们认为，上述原则或这样的思想规定是合理的. 有如对上述(1)而言，既然我们已设定谓词 P 是精确谓词，从而 P 和 $\exists P$ 这一反对对立面是没有中介对象的. 而任何一个实无穷刚性集合都是完成式，既然是完成式就必须强调由对立的此方转化到对立的彼方. 如此由认识论和科学哲学的普遍规律，可知对立面的相互转化是要通过中介过渡才能完成的，所以无中介的精确谓词不能完成这一转化过程. 为此，一个精确谓词是不能用来确定任何实无穷刚性集合的. 但因潜无限弹性集合永远是现在进行式，对于任何潜无限进程不存在由对立此方到对立彼方的转化问题，只要求那些完全满足该谓词 P 的对象，总能一个一个地被包容到相应的弹性集合中来就可以了. 从而用精确谓词来决定一个一意确定的潜无限弹性集合是不成问题的. 又对于上述(2)而言，如果谓词 P 是模糊谓词，则 P 和 $\exists P$ 这一反对对立面必然存有亦此亦彼的中介现象，即有对象

x 能使有 $\sim P(x)$. 从而由 P 通过 $\sim P$ 而转化到ㅋP 是可以完成的，亦即用模糊谓词 P 来确定一个完成了的实无限刚性集合是可以实现的. 另一方面，我们亦可由该模糊谓词 P 来确定一个一意确定的潜无穷弹性集合，因为只要此时不去考虑由 P 向ㅋP 转化一事就可以了. 因为对于该模糊谓词 P 而言，我们将完全满足该谓词 P 的对象一个一个地包容到相应的弹性集合中来这件事总能实现，而且是一件首先要办到同时又能办到的事. 总之，这样一个构造性的进行式是任何一个无穷背景世界中的谓词都能实现的.

在下文中，我们将在两种不同背景条件下，分别讨论实无限刚性集合的结构模式.

其一是在不受中介系统框架约束的背景下去作最一般意义上的讨论，其二是在中介系统框架约束的背景下进行讨论，两者的根本区别主要是精确谓词与模糊谓词是否满足排中律，因为这两种谓词满足排中律一事在中介系统中是作为一条定理而被严格证明的，亦即在设置中介系统的逻辑公理与非逻辑公理时就预示了这一结论，而且中介原则也不主张任何反对对立面都有中介.

7.6.2 无约束背景下的实无限刚性集合的结构模式

现在我们先在无约束的最一般意义下进行讨论. 由于实无限刚性集合必须是完成式，从而必须完成由造集谓词 P 到ㅋP 的转化过程. 但要完成该转化过程，则必须经过它们的中介 $\sim P$，另一方面，我们所讨论的都是无穷集合的问题，从而还要完成从潜无限到实无限的转化，因为潜无限和实无限又是一个反对对立面，要完成该反对对立面的转化，又要经过潜无限和实无限的中介，我们用 δ 来表示它们的中介状态，从而 δ 在此也抽象地表示从潜无限弹性集合到实无限刚性集合的转化过程中的中介状态. 又从存在形态方面看，潜无限弹性集合的元素是逐个逐个地被包容进来的，从而元素与元素之间是相互离散的，亦即任一元素总有左邻元或右邻元. 而离散的对立面是连续，我们用 δ 来表示离散和连续这一反对对立面的中介状态，所以由潜无限弹性集合到实无限刚性集合的转化，就集合的存在形态而言，将面临着由离散到连续这一反对对立面的转化，而要完成这一转化过程又要通过它们的中介 δ. 总之，在潜无限弹性集合基础上构建实无限刚性集合，将面临着造集谓词 P 和ㅋP、潜无限与实无限、离散与连续三种对立面的转化过程，这些转化过程的完成

将依次通过它们的中介 $\sim P$、$б$ 和 δ 去实现. 在这里 $\sim P$ 和 $б$、δ 不在一个层面上，因为 $\sim P$ 有相对特殊性，将由造集谓词 P 来确定，亦即不同的造集谓词 P 就有不同的 $\sim P$，而且 $\sim P$ 和 $\urcorner P$ 也都是独立的造集谓词，它们都在同一个层面上. 但是 $б$ 和 δ 不一样，它们并不受制于某个造集谓词，对于任何造集谓词而言，$б$ 和 δ 的存在都是不变的，因此，$б$ 和 δ 要比 $\sim P$ 高一个层面，即抽象层面，而满足谓词的对象却要比谓词与集合低一个层面. 总之，$б$ 和 δ 在较高的抽象层面上，而 $\sim P$ 则处在较低的谓词与集合层面上，又元素或对象 x 则处在最低的对象层面上.

如果说古典集合论和近代公理集合论在一个谓词唯一确定一个（实无限刚性）集合的思维方式下，将上文所论之 $\sim P$、$б$ 和 δ 等中介过渡简化而使之消失，那么在这里对相关问题，却要强调不要过于复杂化，否则不利于持续研究. 为此，我们将重点研究 $\sim P$ 和 $б$ 的中介过渡，因为关于 δ 的中介过渡主要涉及存在形态，它和事物的本质内涵并不直接相关.

根据以上的讨论，任给造集谓词 P，则相应于 P 的实无限刚性集合的结构模式应包含如下几个方面的内容：其一是满足 P 的对象所构成的潜无限弹性集合 $\alpha = \{x \mid P(x)\}$，其二是满足谓词 $\sim P$ 的对象所构成的潜无限弹性集合 $\beta = \{x \mid \sim P(x)\}$，其三是满足谓词 $\urcorner P$ 的某个常元 a，其四是适合于 $б$ 这种存在的那些对象 y.

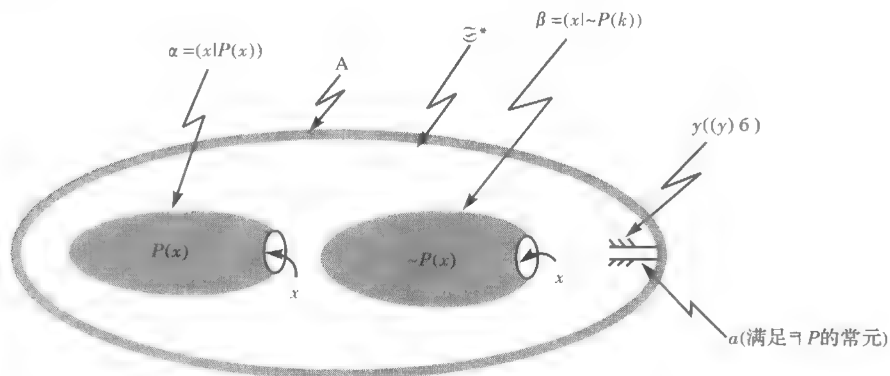
对于如上的“其四”而言，由于潜无限与实无限，以及它们的中介 $б$ 都不是什么具体的造集谓词，也不在谓词和集合的层面上，它们是更高层面上的某种抽象的存在. 然而既然是一种存在，就应有适合于这种存在的对象，但因 $б$ 不是任何具体的造集谓词，所以那些适合于 $б$ 这种存在的对象 y 并不产生什么弹性或刚性集合，只知道这些 y 应该被包含在由谓词 P 开始而逐步建造出来的实无限刚性集合内. 在这里类似于 $P(x)$ 表示对象 x 满足谓词 P 的记法，我们也用 $(y)б$ 来表示对象 y 适合 $б$ 的存在. 对于那些适合于 $б$ 存在的 y，首先应该部分地具有实无限性质，亦即部分地是完成式，从而已经部分地达到满足 $\urcorner P$ 的常元 a，其次这些 y 又应部分地具有潜无限性质，亦即部分地是进行式，从而又部分地永远达不到那个满足于 $\urcorner P$ 的常元 a，所以只能说每个 y 都已部分地与 a 黏连在一起，此处 a 满足谓词 $\urcorner P$. 再则从离散与连续的角度去看这些适合于 $б$ 存在的 y，它们的存在形态应该适合于 $б$，亦即这些与 $a(\urcorner P(a))$ 部分地黏连在一起的对象 y 之间应该是部分地连续，又部分地离散. 由于我们在实数论中，称有间隔者为离散，无间隔而有孔隙者为处处稠密，既无间隔又无孔隙者为连续. 那么，处处稠密就是离散与连续这一反对对立面

的中介状态 δ. 所以那些部分地黏集于 $a(\exists P(a))$ 而又适合于 δ 存在的 y,就像自然顺序中的有理数那样处处稠密地黏集于常元 a 上. 也正因为那些适合于 δ 存在的 y 是处处稠密地黏集于常元 a 上,所以当我们将常元 a 从这种结构模式中取走的时候,势必也将这些黏集在常元 a 上的 y 也取出去了. 在这里应注意,常元 $a(\exists P(a))$ 在实无限刚性集合中的存在,标志着由 P 到$\exists P$ 的转化的完成式,从而将常元 a 从实无限刚性集合中取出,也就标志着完成式的消失,因此也就回复为现在进行式,或者说这时已从实无限回复到潜无限. 这就是说实无限刚性集合已被损坏而不复存在. 另一方面,那些处处稠密地黏集于常元 a 上的适合于 δ 存在的 y 随着 a 的取出而取出,更标志着在实无限刚性集合被破坏的同时,所剩的也只有由 P 和 $\sim P$ 所决定的两个潜无限弹性集合了,而两个弹性集合的并也将仍然是一个潜无限弹性集合.

至此,我们可将由谓词 P 所决定的实无限刚性集合 A 的解析表达式记为

$A = \{x, y, a \mid P(x) \text{or} \sim P(x) \text{ or } (y)\delta \text{ or } a\}$,其中 a 满足谓词$\exists P$.

我们也可将相应于谓词 P 的实无限刚性集合的结构模式直观地图示如下:



这也许可以比作一个半生半熟的双黄鸡蛋,所谓半生半熟指的是蛋黄尚未开始凝固而蛋白已经有点凝固的状态. 其中由 P 和 $\sim P$ 所决定的两个潜无限弹性集合就相当于两个尚未开始凝固的蛋黄,而蛋壳就是实无限刚性集合 A 的边界,那些黏集于 $a(\exists P(a))$ 上的适合于 δ 存在的 y,连同常元 a 被 y 所黏集的部位一起嵌在半凝固的蛋白中,而 a 上未被 y 所黏集的部位虽在蛋壳内,但却露在半凝固的蛋白外,在这里可将该半凝固状态的蛋白体视为弹性集合与刚性集合的中介,并记为 S^*. 因为潜

无限与实无限在谓词与集合层面上分别对应于弹性集合与刚性集合，所以 S' 应该是 σ 在集合层面上的对应物，必要时可将 S' 称作准刚性体或超弹性体.

7.6.3 有约束背景下的实无限刚性集合的结构模式

现在我们再在受到中介系统框架约束的背景下讨论实无限刚性集合的结构模式. 所说的约束就是确认中介系统中所证明的"精确谓词与模糊谓词满足排中律"一事. 亦即任何谓词要么是精确谓词要么是模糊谓词，或者说精确谓词与模糊谓词这一反对对立面没有中介对象. 既然如此，由于精确谓词决定弹性集合，而弹性集合又是潜无限在谓词与集合层面上的实现，又刚性集合是由模糊谓词决定的，同时又是实无限在谓词与集合层面上的实现. 因此，只要精确谓词与模糊谓词没有中介，那么它们所相应的弹性集合与刚性集合，以及潜无限与实无限也就都没有中介. 从而此时所要构建的实无限刚性集合，也就只有造集谓词 P 和 $\neg P$，以及离散与连续这两种对立面的转化，这些转化过程将依次通过它们的不在同一层面上的中介物 $\sim P$ 与 σ 去实现. 如此，任给造集谓词 P，则相应于 P 的实无限刚性集合的结构模式应包括如下几个方面的内容：其一是满足谓词 P 的对象所构成的潜无限弹性集合 $\alpha = \{x \mid P(x)\}$；其二是满足谓词 $\neg P$ 的某个常元 a，其三是满足谓词 $\sim P$ 的那些对象 y.

对于上述的"其三"而言，可分两种情况考虑：第一是强调那些满足谓词 $\sim P$ 的对象 y 亦构成一个弹性集合 $\beta = \{y \mid \sim P(y)\}$，如此将由两个弹性集合 α、β 和一个满足谓词 $\neg P$ 的常元 a 构成我们所要构建的实无限刚性集合 A，而 A 中那个常元 a 的存在，就标志着由 P 到 $\neg P$ 的转化过程的完成，也就由此标志着实无限刚性集合 A 的完成式. 第二是不强调那些满足谓词 $\sim P$ 的对象构成什么弹性集合，而侧重强调每个满足 $\sim P$ 的对象 y 必定部分地满足谓词 $\neg P$ 的特点，因此也就已经部分地达到常元 $a(\neg P(a))$. 类同于无约束背景下关于适合于 σ 存在的 y 的讨论，可知那些满足谓词 $\sim P$ 的对象 y 均已处处稠密地黏集于常元 $a(\neg P(a))$，从而也就突出了由谓词 P 直接通过 $\sim P$ 转化到 $\neg P$ 的完成式特点. 对照前文无约束背景下实无限刚性集合 A 的那个双黄鸡蛋的直观图象与相关的讨论，也就不难给出有约束背景下的上述两种实无限刚性集合 A 的直观图象，并作类似的讨论. 综上所说，有一个最核心的共同点，那就是不论在哪种背景或考虑之下所构成的实无限刚性集合 A，必定包含着那个

满足谓词$\exists P$的常元a,而且一旦将a从A中取出,则A就必定转化为潜无限弹性集合A.

最后对于上述实无限刚性集合的结构模式而言,尚有两点认识需要澄清:其一是对于所论的实无限刚性集合A而言,虽然可以断言所有满足P和$\sim P$的对象x全被包含在实无限刚性集合A中,但仍然无法问也无法回答在A中的所有满足P或$\sim P$的x汇在一起具有什么势,因为提出这个问题时就要以承认一个精确谓词(P或$\sim P$)唯一决定一个实无限刚性集合的合理性为前提,但在我们这里,只有一个精确谓词唯一决定一个潜无限弹性集合的思想规定,从而由且仅由满足某个精确谓词的实无限刚性集合是不存在的;其二是怎样理解和认识实无限刚性集合的势,根据如上所论之在潜无限弹性集合基础上构建的实无限刚性集合之结构模式,应该认为实无限刚性集合的势决定于构成它们弹性集合的势,亦即若设弹性集合α和β依次分别为刚性集合A和B的真子集,如果α的势小于β的势,则就断言A的势小于B的势,可以认为"实无限刚性集合之势决定于构成它的弹性集合之势"的思想规定是合理的.事实上,在传统集合论中,对于势这一概念的建立,完全决定于"一一对应原则",而一一对应原则的使用,除了给出一个对应规则(或对应函数)之外,剩下的就只有对集合中元素的任意递归枚举了,但是任意递归枚举集合之元素至多只能是一个潜无限进程,从而至多只能适用于潜无限弹性集合.康托将基于任意递归枚举的一一对应原则任意应用到实无限刚性集合上是没有根据的,特别是任意应用到不可数集合上就更无根据了,因为即使在传统集合论观念下,也都承认任意递归枚举至多到可数无穷,既然如此,试问立足于任意递归的一一对应原则,又如何能去决定不可数实无穷集合的势呢?所以用一一对应原则来决定各种各样实无穷刚性集合的势是很有局限性的.当然,由于在传统集合论中没有潜无限弹性集合这个概念,所以集合之势的概念都是指实无限刚性集合之势.而对于我们所论之潜无限弹性集合而言,可用"包容量"或"容势"这个词去取代传统集合论中关于"势"这个词.进而规定任何实无限刚性集合之势决定于构成该集的潜无限弹性集合的容势.而对于潜无限弹性集合的"容势"而言,就可以合情合理地使用对角线方法,以及弹性集合及其幂集去划分和比较其容势的大小.

附 录
Hegel 论消极无限与积极无限

对于无穷的认识和理解，古典哲学家们往往比自然科学家有着更深的分析和考察，而不停留在只是观点分歧的水平上. 特别是相对于数学分析的 Cauchy-Weierstrass 时代，相对于直觉主义派的无穷观，对于那种不断扩展式的无穷进程，古典哲学家们更是走在自然科学家的前面，早已提出了相反的意见. 对那种把无穷单纯地归结为同一物的不断重复的无穷观提出了强烈的批评，Kant 认为这种无限观是可怕的，Spinoza 认为这是一种想像的无限，Haller 认为必须摆脱它们（量的无穷进展）这一切，Hegel 则称之为恶的无限性，科学哲学的经典作家 Engels 和 Ленин 都对区分真假无穷的必然性给予肯定的回答. 因此，在数学领域里探索无穷奥秘的崎岖小路上，先听一听古典哲学家的意见或看法，将有助于我们克服摸索中的困难. 如所知，Hegel 在他的《逻辑学》中曾以较大的篇幅讨论了无穷的实质问题，论述了消极无限与积极无限的实质性差异. 在这里，让我们转述一下 Hegel 的见解. 所谓转述，首先是把 Hegel 的那些故作高深、晦涩难懂的音调抛开，尽可能地用通俗易懂的哲学语言予以表注. ①

（Ⅰ）质的限度与当作质的自然数 一个存在，如果它不是一个与它自身之外的别的存在发生关系的存在，它便不是一个有确定性的存在，一个没有确定性的存在便是一个没有客观性的存在，而一个“没有客观性的存在便是一个非存在.”[184]

一个存在，如果除了这个存在之外没有别的存在，那么就没有别的存在来和它发生关系，它便不是一个与别的存在发生关系的存在，从而将是一个唯一的、孤独的存在. 而这样一种存在，也就是一种假定的，没有客观性的、其自身既不是对象也没有对象的存在，“但是一个没有对象的存在就是一个不真实的、非感性的、只是空想的或虚构的存在，一个抽

① 本附录主要介绍 Hegel 等一批哲学家，针对自然科学界一般只承认潜无限而否定实无限的思潮，从哲学思维的高度所进行的分析批评. 但其中有关自然数序列亦为积极无限意义下之无穷总体的陈述，从本书第二篇的分析讨论来看，也是有局限性的. 总之，本附录仅供有兴趣的读者参考.

象的存在."[164] 从而是一个非存在.

一个存在,只有当它与自身之外的别的存在发生客观关系时才被确定.一个关系,如果是一个客观关系,它便是一个规定性.一个存在,如果是在它与别的存在发生关系的限度内,便是在规定性内.一个在规定性内的存在,对于和它发生关系的、从而确定它的、在它自身之外的一切别的存在来说,便是一个质.

"数是我们所知道的最纯粹的量是规定,但是它却充满了质的差异."[165] 但是一个数,只有当它与其自身之外的别的数发生客观的运算关系时才被确定,只有当它在其与别的数发生运算关系的限度内,才有它自身之质的规定性.从而只有一个在规定性内的数,只有对于和它发生关系的、从而确定它的、在它自身之外的一切别的数来说,它才是一个有质的规定性的数.如果它不是一个与自身之外的别的数发生客观运算关系的数,或者除了这个数之外没有别的数,那么它便是一个虚构的、不可了解的数.

但是一个存在的属性,不是当它与别的存在发生关系,从而在这个关系中确定了它的质之后才产生出来的.相反地,却正是因为它有着某种属性,它才能和别的存在发生某种这样而不是那样的确定的关系.因为如果它没有这些属性,它便不能与其他存在发生确定的、从而规定其质的客观关系.如此,一个"为他"的存在,必须首先是一个"即是"的存在.如果它不是"即是"地存在着,它便不能"为他"而存在着.

从而一个数的性质,不是当它与别的存在发生客观的运算关系,从而在这个关系中确定了它的质之后才产生出来.相反地,却正是因为这个数有着某种性质,它才能和别的数发生这样而不是那样的确定的运算关系.

总之,一个存在必须既是"即自在"又是"为他在",于是这个存在便分裂为二.

一个在规定性之内的存在,当它与其自身发生关系的、从而确定它的、在他自身之外的一切别的存在发生客观关系的同时,就必须首先包含这些关系于其自身之内.从而一个存在当作"为他"的存在,不会存在于其当作"即自"的存在之外.从而事物之一切属性便是它的质的限制或限度.因此,把一个存在当作一个质,便是一个被限制的存在.

从而一个数的一切性质,便是这个数的质的限制或限度.因此,将一个数从质的观点来把握时,它便是一个被限制的数.

(11)质的消极无限 一个质的限度必然内在于其自身之内,它无论

如何也不能摆脱自身的这个限度而存在.一个质,显然不是浮在太虚之中,它是存在于某个存在之内,脱离了这个存在,它便不能存在.从而只有在它自身的这个限度内,它才能具有其现实性.一个现实的存在性,如果当作某物,当作肯定性,则就必然包含其自身之否定性于其自身之内.因为一个肯定之所以是一个肯定,正是由于存在着它的否定,要是我们把一个质的否定性去掉,则其肯定性也就不能存在和不可理解了.

如果一个质是有客观性和确定性的,那么它的否定当然也应该是有客观性和确定性的,否则它就不能否定一个有确定性的东西.事实上,它不能是一个一般的、虚无的、绝对的否定,而是一个质的否定,从而是一个肯定.但是一个质的否定性一旦成为现实的肯定性,则这个质本身便成为否定,成为别的质而过渡为别物了,但这种过渡永远不会完结.

根据前面的讨论,质必须是一个被限制的存在,它必然具有其自身的否定性于其自身之内,从而它的限度或限制便在其否定性中完善地被发挥出来,从而必须超出这个限度而过渡为异质的存在.因此,"某物成为一别物,而别物自身亦是某物,因此它亦同样成为一别物,如此递推,以至无限,"[186] "这种无限是坏的或消极的无限,因为这种无限是空虚的,只是有限的否定,而有限性仍然重复发生,还是没有被扬弃."[186] *Hegel* 继续举例来解说这种消极无限的概念,他说:"譬如,当我们谈到空间和时间的无限性时,我们所想到的总是那时间的无限延长,空间的无限扩展.譬如我们说,此时——现在——,于是我们便进而超出此时的限度,继续不断地向前或向后延长.同样对于空间的看法亦复如此,…我们先立定一个限度,于是我们又超出这限度,然后我们又立一限度,又超出这限度,如此递进,以至无穷.凡此种种,除了表面上的变易外,没有别的了.在这种变易中,我们从来没有脱离掉有限的范围.假如我们认为踏进这种无限可以从有限中解脱出来,实无异于从逃遁中去求解脱,但那逃遁的人尚不是自由的人,在逃避中,他仍然受他欲逃遁之物的限制."[186]

根据(Ⅰ)的讨论,一个数,如果从质的观点来把握时,就必须是一个被限制的数,它必须包含其自身之否定性于其自身之内,从而必须超出这个限制而过渡为别的数.如此,由 1 过渡为 2,由 2 过渡为 3,普遍地由 n 过度为 n+1,以此类推,永无止境."然而凡此种种,除了表面上的变易外,没有别的了,在这变易中,我们从来没有脱离掉有限的范围."[186]所以,在上述消极无限的理解下,我们所能看到的仅仅是那对 n 的否定而过渡到 n+1,我们的思想只能滞留于"1,2,3,…,n"之中,而无法将有限真正予以扬弃.因而无力超脱有限的范围而飞渡到反映真正无限的自然

数无穷总体．在此所得者，仅仅是一个可以任意给定有限自然数之权力而已．

(III)质的积极无限　积极无限亦称真实无限或真正的无限．要认识真正的无限，首先应该放弃思想的消极无穷进展，集中兴趣于对象的真实内容，亦即事物之本质所在或普遍性．

原来，我们把一个存在当作一个质，一个肯定的质，和它的否定性都存在于同一个存在之中．一个肯定的质既然与它自身的否定性共存于同一存在之中，这同一的存在便分裂为二，使自己和自己对立起来了．如果把一个质的否定性转化为肯定性，从而转化为现实的存在性，从而把原来这个质转化为非现实的存在性，只不过是把原来已经存在着的别的质变成现实性罢了．从而在这个往别物的过渡中，并不是某物过渡为别物，而是别物过渡为别物．"既然过渡达到之物与过渡之物是完全相同的(因为二者皆具有同一的性质，即同为别物)，则因此可推知，当某物过渡为别物时，只是和它自身在一起罢了．而这种在过渡中，在别物中而达到的自我关联，就是真正的无限．"[186]所以，真正的无限绝不是某物之无止境地向别物过渡，而是内在于一切过渡物自身中之共同本质或普遍性，亦即那种在过渡的别物中达到的自我关联，正因为如此，存在于某物自身之内的这种共同本质或普遍性，在上述那种消极无限之变易中，不论从别物过渡到它，或者由它过渡到别物的时候，都不能把它否定掉，而是与它不可分割地关联着、离不开它．例如，由 n 到 $n+1$ 的过渡，不能把诸自然数之共同本质或普遍性——有限序数——否定掉，而是与每个过渡之物 n 关联着、离不开它．从而也只有在过渡物之共同本质或普遍性中，才能达到过渡进程之自我完成，所以 Hegel 把这种积极无限又称之为"进程之自我完成"(going together with itself)，而其中之"进展"(going)便是那种消极无限的变易和过渡，而"自我完成"便是由过渡物之普遍性所确定之一切过渡物之全体．例如，由过渡物 n 到 $n+1$ 之普遍性——有限序数——所确定之全体自然数无穷总体．

Hegel 又把真正的无限表达成"否定之否定"这一公式．第一个否定便是有限之物对自己的否定，然后它又否定自己的这个否定，成为真正的肯定．第一否定是某物的否定，从而是一个规定性，其内部包含了某物的规定性．第二个否定又是第一个否定的否定，从而又是一个规定性．因此，否定之否定包含有被否定之物，亦包含有否定之物．但以它们的规定性作为其自身的规定性，从而对于某物或别物的规定性，否定之否定的这个肯定便不被它们所限制，它便是真正的无限．例如，在积极无限意义

下的自然数序列

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots|\omega$$

是一个完成了的无穷总体，它并不停留在有限之不断重复的阶段上，而认为这种不断过渡的进程能够达到穷竭的地步，从而成为一个自我完成了的无穷总体. 所以真实无限观之下的自然数全体便是一个否定之否定，第一个否定是肯定了进展（否定了有限的常住性），第二个否定是进展之完成，从而真正扬弃了有限序数 n 的有限性，变为非有限序数而引进了ω. 而这个真正的无限同时也在更高的形式上回复到了有限，即高一层次上的单体对象.

（IV）量的区分与比较 一个存在，如果是一个有确定性的存在，它就必须是能够和别的存在区别开来的存在. 把一个存在当作一个质，亦就把这个存在从所有与这个存在异质的存在中区别开来，但还没有把它从所有与这个存在同质的存在中区分出来，要把它从同质的存在中区分出来，就必须在这些同质的存在之间的关系中去区分，这个关系便是量的关系，这个区分便是量的区分，从而要使两个存在发生量的关系，就只有在它们的质的差异性被取消之后才有可能. *Marx* 说："当作使用价值，各种商品首先是异质的，但当作交换价值，它们只能是异量的，不包含任何使用价值原子."[187] *Marx* 为说明这一点而举了一个初等几何的例子："要决定并比较诸直线形的面积，我们把诸直线分成三角形. 我们再把三角形还原为全然与它的外表形态不同的东西，那就是还原为底乘高的$\frac{1}{2}$. 同样，诸商品的交换价值，也要还原为一种共通物，各代表这共通物的多量或少量."[187] 这就是所谓约化为同质. 同样在积分学里处理和比较诸不规则曲线形面积时，就必须把它们约化为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就是与诸不规则曲线形的外表所完全不同的共通物.

（V）限量与参考量 一个量，如果是确定的量，它必须是有限的量. 有限的量，就是一个特殊的量，就是除了这个量之外还存在着与它不同的量，一个量之所以是确定的量，正是由于它与自身之外的别的量发生了确定的量的关系.

当一个量处在被其他的量所限制、所确定之状态上的时候，我们把它叫作有限的量——限量. 有限的量就是有限度的量. 限度是限量与其他量的关系. 然而与限量发生关系的其他量不能从这个关系之同一表达式内获取量的确定性. 它们的确定性必须在这个关系之外预先确定. 这

个不是在关系之内而被预先确定的量,叫做参考量.一个量可以是限量,也可以是参考量,但不能在同一关系的同一表达式内既是限量又是参考量.

然而限度又是参考量与限量的关系所构成.参考量的确定性只是一个“假定在先”的确定性,从而是一个非确定性.从而当我们立定了一个限度,这限度马上转变到它自身的反面——非限度,如此递推,以至无限,这就是量的消极无限.其实,限量与限度是同一的,所谓甲量等于乙量的多少倍,这等于二字就是限量与限度之间的同一性.如此,所谓限量与限度之对立,不过是它自身与自身相对立,从而它自己是其自身的别物.当它由于限度的扬弃而过渡到别的限量时,只是别的限量过渡到别的限量,这种在过渡中,在别的限量中达到的自我关联——一切过渡限量之共通物——便是量的积极无限.

(VI)限量到质的转化与量的绝对无限 一个存在,既有其自身所特有的质的规定性,亦有其自身所特有的量的规定性.既无无质之量.亦无无量之质,量和质同样都是事物构成的一个不可分割的方面.从而一个存在是一个质与限量的统一.所以 Hegel 认为量是扬弃了的质.把一个存在当作一个质,从而量的规定性便是这个质的量的规定性,反之,质便是这个量的质的规定性.然而一个存在具有如何的量与如何的量变皆由其自身之质的规定性所确定,从而质是主导的,量是从属的.

如所知,量变达到一定限度时,必然引起质变,从而就变革了这个存在的原有存在.反之,量在一定限度之内的变化却并不引起质变.从而就并不改变这个存在的原有存在.所以,Hegel 认为量只具有外在于有的性格,只有质才是与有具有同一的性格.

把限量当作质的限量,当质变完成时,限量已经是另一个质的限量,这两个限量由于是不同质的限量,它们之间就不能有量的比较,也就不能发生量的关系.因此,质的规定性便是当作质的限量的绝对限度,而相对于绝对限度的无穷便是绝对的无限,亦即量的绝对无限就是限量转化为质.但从质的较高层次考察时,一个质之低层次限度内的绝对限度在高层次限度内又是相对的.例如 ω,相对于有限序数 n 是一个绝对的限度,所以是绝对的真实无限,但是相对于可数型序数 $\alpha(n<\alpha<\Omega)$ 而言就仍然是相对的.

另外,就任何能够把握的无限而言,必须是一个事物的无限,从而是一个特殊的无限,因之,无限归根到底还是相对的和有条件的.

参考文献

[1] 梁宗巨. 世界数学史简编. 沈阳：辽宁人民出版社，1980.

[2] M. Kline. 古今数学思想. 第 3 册. 上海：上海科技出版社，1980.

[3] B. И. Костин. 几何基础. 苏步青，译. 北京：商务印书馆，1954.

[4] Euclid. 几何原本. 兰纪正，朱恩宽，译. 陕西：陕西科学技术出版社，1990.

[5] 朱梧槚. 几何基础与数学基础. 沈阳：辽宁教育出版社，1987.

[6] Hilbert. 几何基础. 江泽涵，译. 第 1 册. 北京：科学出版社，1958.

[7] B. L. Van der Wearden. Algebra. Vol I. Springer Verlag，1955.

[8] 朱梧槚，肖奚安. 数理逻辑引论. 南京：南京大学出版社，1995.

[9] 朱梧槚，肖奚安. 集合论导引. 南京：南京大学出版社，1991.

[10] Hausdorff. Mengenlehre. Watter de Hruyler，1935.

[11] 朱梧槚，等. 集合论与点集空间. 南京大学学报：自然科学版，1980(3).

[12] H. H. Лузин. Теори Фүнкчий Лействитедьноро Леременноро. Государственное уиебно -Ледагогическое Издательство Министерства Просвешения РСФСР，1948.

[13] 徐利治. 关于 Cantor 超穷数论上几个基本问题的定性分析和连续统假设不可确定性的研究. 东北人民大学：自然科学学报，1956(1).

[14] 徐利治，朱梧槚. 超穷过程论中的两个基本原理与 Hegel 的消极无限批判. 东北人民大学学报，1956(2).

[15]徐利治，朱梧槚. 超穷过程论的基本原理，东北人民大学：自然科学学报，1957(1).

[16] 徐利治，朱梧槚. 在素朴集合论与超穷过程论观点下的 Cantor 连续统假设的不可确定性. 东北人民大学：自然科学学报，1957(1).

[17] 莫里斯 · 克莱因. 数学基础. 陈以鸿，译. 自然杂志，1979(4).

[18] M. Kline. 古今数学思想. 第 1 册. 上海：上海科学技术出版社，1979.

[19]《逻辑学辞典》试写辞条选登. 社会科学战线，1980(2).

[20] 张锦文. 集合论与连续统假设浅说. 上海：上海教育出版社，

1980.

[21] 黄耀枢. 论逻辑在数学发展中的作用. 哲学研究,1979(4).

[22] A . A . Fraenkel & Y. Bar -Hilell. Foundations of Set Theory. Amsterdam:North-Holland,1958.

[23] 莫绍揆. 数学三次危机与数理逻辑. 自然杂志,1980(6).

[24] 莫绍揆. 数理逻辑初步. 上海:上海人民出版社,1980.

[25]《科学美国人》编辑部. 从惊讶到思考——数学悖论奇景. 李思一,白葆林,译. 北京:科学技术出版社,1982.

[26] 朱梧槚. 两点意见. 数学研究与评论,1982,2(4).

[27] 莫绍揆. 关于 Epimenides 悖论. 数学研究与评论,1983,3(4).

[28] 朱梧槚. 答《关于 Epimenides 悖论》一文. 数学研究与评论,1985,5(1).

[29] Luchins. A. & Luchins. E. . Logical Foundation of Mathematics bor Behavioral Scientists. New York Holt Rine Hart and Vinston Inc,1965.

[30] 徐利治,朱梧槚,等. 关于悖论的定义、成因和 Russell 对悖论的解决方案. 江苏省哲学社会科学联合会 1981 年年会逻辑论文选,1982.

[31] Waisman. Introduction to Mathematical Thinking.

[32] N. 那汤松. 实变函数论. 徐瑞云,译. 北京:高等教育出版社,1956.

[33] Shen Yu Ting. Paradox of the Class of All Grounded Classes. J. S. L. ,1953,18:114.

[34] Hilbert. Uber das Unendlicse. Math. Ann, 1925: 161-190, English trans in 〈1〉:134-151.

[35] 杨熙龄. 悖论研究八十年. 国外社会科学,1980,7.

[36] Gödel. Russell's Mathematical Logic in the Philosophy of Bertrand by P. A. Sehilpp, New York. Tudor: 1944. Reprinted in This Anthology,211-312.

[37] Russell. Introduction to Mathematical Philosophy. London: G. Allen, 1919. Excerpts Repinted in this Anthology, 113-133.

[38] Herbert B. Enderton. Elements of Set Theory,1977.

[39] Carnap. R., Die Mathematijk als Zweig der Logik, Blälter für deutsche phiosophie.

[40] Shaw-kwei, Moh. . Logical Paradoxes for Many-Valued Sys-

tems. J. S. L. ,1954,19.

[41] 朱梧槚,肖奚安. Russell 悖论的变形与 ZFC 正规则公理——对无根据悖论和多值逻辑悖论的评析与介绍. 数学研究与评论,1985(3).

[42] C. C. Chang. The Axiom of Comprehension in infinite Valued Logic. Math. Scand. ,1963(13).

[43] J. E. Fensted. On the Axiom of Comprehension in the L′ukasiewicz Infinite Valued Logic. Math Scand.,1964(14).

[44] 朱梧槚,肖奚安. 多值逻辑系统与概括原则的不相容性问题研究情况综述. 数理化信息,1986(2).

[45] Zheng Yuxin,Xiao Xian,Zhu Wujia. Finite-Valued or Infinite-Valued Logical Paradoxes Proceedings. The Fifteenth International Symposium on Multiple-Valued Logic,1985.

[46] Nagel, E. &J. R. Neman. Gödel's Proof. New York: New York Univ.

[47] Gödel. On Formally Undecidable Propositions of Principle Mathematical and Related Systems. Trans. by B. meltzer, with an Introduction by R. B. Braithwaite.

[48] 杨熙龄. 哥德尔对哲学的贡献. 国外社会科学,1979(5).

[49] Tarski, A.,"The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics"in Readings in Philosophical Analysis, ed. by H. Feigl and W. Sellars. New York: Appleten,1949.

[50] Carnap. Die Logizistiscse Grundlegung der Mathematik. Erkenntnis,1931(2),Tranlated in〈1〉:31-41.

[51] 杨百顺. 李志刚. 现代逻辑辞典. 武汉:湖北教育出版社,1995.

[52] Russell. A History of Western Philoso phy. New York: Siman and Schuster.

[53] Wang H. From Mathematics to Philosophy. 1974.

[54] Russell. My Philosophical Development. London: George Allen and Vnwin,1959.

[55] Benacerraf & Putnam. Philosophy of Mathematics. Englewood Cliffs, N. J., Prentice -Hall,1964.

[56] 莫绍揆. 传统逻辑和数理逻辑.《逻辑学文集》,1981.

[57] 黄顺基,等. 论公理方法. 北京师范大学学报, 1978(10).

[58] Heyting . Intuitionism: an Introduction. Amsterdam: North-

Holland pub,1956.

[59] Brouwer. Intuitionme en Formalisme. English trans in Bull Amer Math Soc (1931) and Reprinted in 〈1〉:66-67.

[60] Weyl. Mathematics and Logic. Amer. Math. Monthly,1946.

[61] 胡世华,陆钟万. 数理逻辑基础. 北京:科学出版社,1981.

[62] Heyting. 关于数学性质的直觉主义观点. 张尚水,译. 自然科学哲学问题,1980(2).

[63] 白劳德. 纯粹数学与其他科学有关系吗? 科学译刊,1978(1).

[64] 胡世华. 数理哲学中的形式主义和柏拉图主义.

[65] Kreisel. Hilbert's Programme. Reprinted in 〈1〉pp157-180.

[66] Gödel. Uber Formal Unentscreidbare Sülze der Principia Mathematica Und Verwandter System: I. Monat Math Phy 38 pp173-193.

[67] 恩格斯. 反杜林论. 北京:人民出版社,1972.

[68] Curry. Remarks On the Definition and Nature of Mathlematics. Dialectica 8 (1954),Reprinted in 〈1〉:152-156.

[69] Cohen. Set Theory and the Continuum Hypothesis. New York:Amsterd am,1966.

[70] Robinson,《Formalism 64》,Logic,Methodology,and Philoso phy of Science,Procedings of the 1964 International Congress, ed Y Bar-Hillel (North-Houand and Pub co):246 288.

[71] Bernays. Sur le Platonisme dans les mathematigues. L'Enseignment math'sematigue 34s, English trans Reprinted in 〈1〉.

[72] Chang C. L.. Fuzzy Topological Spaces. Jour. of Math. Anal. Appl.,1968,24(1):182-190.

[73] Lowen R.. Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness, Jour. of Math. Anal. Appl.,1976,56(2):621-623.

[74] 蒲保明,刘应明. Fuzzy Topology,Jour. of Math. Anal. Appl. 1980,76(2):571-599.

[75] 刘应明. Fuzzy 拓扑空间中的邻近构造. 模糊数学,1982(3).

[76] Rosenfeld A.. Fuzzy Groups. Jour. of Math. Anal. Appl., 1971,35(3):512-517.

[77] Katsaras A. K, Liu D. B.. Fuzzy Vector Spaces and Fuzzy Topological Vector Spaces. Jour. of Math. Anal. Appl.,1979,58(1): 135-146.

[78] 张锦文. 正规弗晰集合结构与布尔值模型. 华中工学院学报数理逻辑专辑,1979(2).

[79] 张锦文. 正规弗晰集合结构的一些基本性质. 华中工学院学报数理逻辑专辑,1979(3).

[80] E. W. Chapin,Jr.. Set-Valued Set Theory. Notre Dame Jour. Formal Logic,1974,15:614-634,1975,16:255-267.

[81] A. J. Weidner. Fuzzy Sets and Boolean-Valued Universes. Fuzzy Sets and Systems,1981,6:61-72.

[82] 朱梧槚,肖奚安. 中介逻辑的命题演算系统(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ). 自然杂志,1985,8:315,1985,8:394,1985,8:473.

[83] 肖奚安,朱梧槚. 中介逻辑的谓词演算系统(Ⅰ)、(Ⅱ),自然杂志,1985,8:540,1985,8:601.

[84] 朱梧槚,肖奚安. 中介逻辑命题演算的扩张(Ⅰ)、(Ⅱ),自然杂志,1985,8:681,1985,8:716.

[85] 肖奚安,朱梧槚. 中介逻辑谓词演算的扩张,自然杂志,1985,8:841.

[86] 朱梧槚,肖奚安. 中介逻辑的带等词的谓词演算系统,自然杂志,1985,8:916.

[87] Wujia Zhu,Xian Xiao. On the Naive Mathematics Models of Medium Mathematical System MM,J. Math Res. & Exposition,1988,8:139.

[88] Xian Xiao,Wujia Zhu. Prositional Calculus System of Medium Logic(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),J. Math. Res. & Exposition,1988,8:327,457,617.

[89] Wujia Zhu,Xian Xiao. Predicate calculus System of Medium Logic(Ⅰ),(Ⅱ)Journal of Nanjing University,1988,24:583,1989,25:165.

[90] Xian Xiao,Wujia Zhu. An Extension of the Propositional Calculus System of Medium Logic(Ⅰ),(Ⅱ),Journal of Nanjing University,1990,26:564,1991,27:209.

[91] Wujia Zhu,Xian Xiao. An Extension of the Predicate Calculus System of Medium Logic,Mathematical Biquarterly,1988,5:177.

[92] Xian Xiao,Wujia Zhu. Predicate Calculus System with Equality Symbol"="of Medium Logic,Mathematica Biguarterly,1989,6:52.

[93] 朱梧槚,肖奚安. 中介公理集合论系统(Ⅰ)——两种谓词的划

分与定义. 自然杂志,1986,9:554.

[94] 肖奚安,朱梧槚. 中介公理集合论系统(Ⅱ)——集合的运算. 自然杂志,1986,9:632.

[95] 朱梧槚,肖奚安. 中介公理集合论系统(Ⅲ)——谓词与集合. 自然杂志,1986,9:714.

[96] 肖奚安,朱梧槚. 中介公理集合论系统(Ⅳ)——小集与巨集. 自然杂志,1986,9:794.

[97] 朱梧槚,肖奚安. 中介公理集合论系统(Ⅴ)——MS 与 ZFC 的关系. 自然杂志,1986,9:873.

[98] 肖奚安,朱梧槚. 中介公理集合论系统(Ⅵ)——逻辑数学悖论在 MS 中的解释方法. 自然杂志,1986,9:948.

[99] 朱梧槚,肖奚安. 从古典集合论和近代公理集合论到中介公理集合论. 自然杂志,1987,10:3.

[100] 朱梧槚,肖奚安. 中介公理集合论系统 MS. 中国科学(A 辑),1988(2).

[101] Wujia Zhu, Xian Xiao. A System of Medium Axiomatic Set Theory. SCIENTIA SINICA(Science in China), Series A, 1988, XXXI (11).

[102] Xian Xiao, Wujia Zhu. The Foundation of Logic and Set Theory for Uncertain Mathematics, Proc, 19th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, 1991, Ⅰ.

[103] 朱梧槚,肖奚安. 数学基础与模糊数学基础,自然杂志,1984,7:723.

[104] 朱梧槚,肖奚安. 答"中介数学没有包括经典数学"一文及其它. 数学研究与评论,1989(1).

[105] 朱梧槚,肖奚安. 关于模糊数学奠基问题研究情况的综述. 自然杂志,1986,9:43.

[106] 钱磊. 中介逻辑 ML 的相容性证明. 模糊系统与数学,1987(1).

[107] Lei Qian. The Gentzen System of Medium Logic. Proc. 19th Inter. Symp. Multiple-Valued Logic, 1989.

[108] 潘振华. 中介谓词逻辑 MF 完备性的一些结果. 曲阜师范大学学报,1988,14(4).

[109] 邹晶. 中介逻辑命题演算系统 MP' 的语义解释及可靠性、完备性. 数学研究与评论,1988(3).

[110]邹晶.带等词的中介谓词逻辑系统 ME* 的语义解释及可靠性、完备性.科学通报,1988,33(13).

[111]盛建国.中介逻辑命题演算系统 MP* 的一些特征.应用数学,1989(4).

[112]吴望名,潘吟.中介代数系统.上海师范大学学报自然科学版,1988(3).

[113] YinPan, Wangming Wu, Medium Algebras, Proc. 19th Intern. Symp. Multiple -Valued Logic,1989.

[114]肖奚安,朱梧槚,邓国彩.带函词的中介谓词演算系统MF* 的消解原理,智能计算机基础研究'94.北京:清华大学出版社,1994.

[115]朱梧槚,肖奚安,邓国彩.基于中介逻辑 ML 的不完全信息推理系统 I³SML,智能计算机基础研究'94.北京:清华大学出版社,1994.

[116]谭乃,肖奚安.MP* 系统中命题联结词含量的完全性.空军气象学院学报,1988,9(1).

[117]Xiao Xian, Zhu Wujia. Independence Lssues of the Propositional Connectives in Medium Logic Systems MP and MP* ,A Friendly Collection of Mathematical Papers I(1990),Jilin University Press.

[118] Xiao Xian,Zhu Wujia. The Non-increment of Minkovski Distance of Propositional Connectives in System MP. Proceedings of the Nineteenth Intenational Symposium on Multiple -Valued Logic,1989.

[119]Zhu Jianying, Xiao Xian, Zhu Wujia. A Survey of the Development of Medium Logic Calculus System and the Research of Its Semantic,A Friendly Collection of Mathematical Papers I(1990),Jilin University Press.

[120] R. Ackerman. An Introduction to Many-Valued Logics. London, 1967.

[121]D. A. Bochvar. On a Three -Valued Logical Calculus and Its Application to the Analysis of Contradictions. Matématicčéskij Sbornik (Recueil Mathématique),n. S. 4(1939), 287-308.

[122] S. C. Kleene. Introduction to Metamathematics, Amsterdam,The Netherlands;North -Holland,1952.

[123]P. W. Woodruff. Constructive Three -Valued Logic. Journal of Symbolic Logic,1970,1(35):183.

[124] Motinori Goto,Shinji Kao,Tomoko Ninomiya. Syn thesis of Axiom Systems for the Three -Valued Predicate Logic by Means of the

Special Four -Valued Logic. Proceedings of the 13th International Symposium on Multiple -Valued Logic, 1983: 228-234.

[125]王元元. 计算机科学中的逻辑学. 北京:科学出版社, 1989.

[126]徐利治, 朱梧槚, 等. 悖论与数学基础问题(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ). 数学研究与评论. 1982, 3, 4, 1983, 2.

[127]朱梧槚, 袁相碗, 等. 关于数学基础诸流派的研究与评论(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ). 南京大学学报:自然科学版, 1983, 3, 4, 1984, 1.

[128]朱梧槚, 张东摩. 中介自动推理的理论与实现(Ⅰ)——中介命题逻辑的表推演系统. 模式识别与人工智能, 1994, 7(2).

[129]朱梧槚, 张东摩. 中介自动推理的理论理与实现(Ⅱ)——中介谓词逻辑的表推演系统. 模式识别与人工智能, 1994. 7(3).

[130]张东摩, 朱梧槚. 中介自动推理的理论与实现(Ⅲ)——中介逻辑定理证明器. 模式识别与人工智能能, 1994, 7(4).

[131] 宫宁生, 张东摩. 中介自动推理的理论与实现(Ⅳ)——一类基于中介逻辑的模态逻辑系统. 模式识别与人工智能, 1995, 8(1).

[132] 张东摩, 朱梧槚. 中介自动推理的理论与实现(Ⅴ)——中介模态逻辑 MK 的表推演系统, 模式识别与人工智能, 1995, 8(2).

[136] 张东摩, 宫宁生. 中介自动推理的理论与实现(Ⅵ)——中介模态逻辑 MS_5 的表推演系统, 模式识别与人工智能, 1995, 8(4).

[137] 张东摩, 肖奚安, 朱梧槚. 中介谓词演算系统 ME^* 与 ME 之间的化归算法及其应用. 南京航空航天大学学报, 1993, 25(5).

[138] 宫宁生, 张东摩, 朱梧槚. 关于中介模态逻辑 MS_4 的表推演系统, 南京航空航天大学学报, 1995, 27(3).

[139] 朱梧槚, 肖奚安, 宋云波. 中介逻辑程序设计语言 MILL 及其解释系统, 《程序设计语言研究与发展》, 电子工业出版社, 1994.

[140] 钱磊, 周以铨. 中介逻辑的模型论性质. 南京航空学院学报, 1992, 24(2).

[141] 钱磊. 中介逻辑的内插定理. 模糊系统与数学(增刊), 1992.

[142] 张东摩, 朱梧槚, 肖奚安. 中介谓词演算的 Skolem 范式及其应用. 全国人工智能学术会议论文集, 1992.

[143]朱梧槚, 肖奚安, 宋方敏, 顾红芳. 无穷观问题的研究(Ⅰ)——历史的回顾与思考. 南京航空航天大学学报, 2002,. 34(3): 101-107.

[144]朱梧槚, 肖奚安, 宋方敏, 顾红芳. 无穷观问题的研究(Ⅱ)——从 Hausdorff 的直觉和 Poincaré 的名言到 Brouwer 剧场现象. 南京航空航天大学学报, 2002, 34(3): 201-205.

[145]朱梧槚，肖奚安，宋方敏，顾红芳. 无穷观问题的研究（Ⅲ）——'每一'与'所有'. 南京航空航天大学学报，2002，34（3）：206-210.

[146]朱梧槚，肖奚安，宋方敏，顾红芳，宫宁生. 无穷观问题的研究（Ⅳ）——自然数系统与无穷公理. 南京航空航天大学学报，2002，34（4）：307-311.

[147]肖奚安，宋方敏，顾红芳，宫宁生，朱梧槚. 无穷观问题的研究（Ⅴ）——一个兼容实无限与潜无限的公理集合论系统 APAS. 南京航空航天大学学报，2002，34（4）：312-317.

[148]朱梧槚，肖奚安，宋方敏，等. 分析基础中的无穷观问题。科学，2005，57（1）：29-33.

[149]朱梧槚，肖奚安，宋方敏，等. 可数集合的无穷观问题，科学，2006，58（2）：25-28.

[150]朱梧槚，徐敏，周勇. 略论近现代数学系统对两种无穷观的兼容性. 自然杂志，2005，27（6）：336-339.

[151]朱梧槚，徐敏，周勇. 近现代数学及其理论基础中的若干隐性思想规定. 自然杂志，2006，28（1）：28-30.

[152]朱梧槚，肖奚安，杜国平，宫宁生. 关于无穷集合概念的不相容性问题的研究. 南京邮电大学学报，2006，26（6）：36-39.

[153]Zhu Wujia, Xiao Xian, Song Fangmin, et al. On Infinity In The Classical Set Theory And ZFC Framework. The Proceeding Of The Second Asian Workshop On Foundations Of Softward, Southeast University Press, Nanjing, China, 2003：3-8.

[154]Zhu Wujia, Xiao Xian, Gu Hongfang, et al. On Infinity And Inconsistency In Foundation Of Mathematics. The Proceding Of The Second Asian Workshop On Foundations Of Software, Southeast University Press, Nanjing, China, 2003：44-48.

[155]朱梧槚. 潜尾数论导引. 辽宁师范学院学报：自然科学版，1979（3）：1-9.

[156]M. 克莱因. 西方文化中的数学. 张祖贵，译. 上海：复旦大学出版社，2005.

[157]F. 豪斯道夫. 集论. 张义良，颜家驹，译. 北京：科学出版社，1960.

[158]徐利治. 略论近代数学流派的无穷观和方法论。吉林大学社会科学论丛，1980（1）：76-91.

[159]徐利治. 无限的数学与哲学(一)、(二)、(三). 高等数学研究,2007,10(1):3-7,10(4):3-8,2008,11(1):3-7.

[160]He Bin,Chen Jun. Research outline on extension mathematics[J]. ACM SIGICE Bulletin,1997,22(3):10-16.

[161]张东摩,肖奚安. 经典公理集合论系统与中介公理集合论系统之间的包含关系[J]. 数学研究与评论,1997,17(3):475-478.

[162]张东摩,施庆生,姜宁根,朱梧槚. MS 中的自然数系统[J]. 南京航空航天大学学报,1997,29(2):179-184.

[163]朱朝晖,施庆生,朱梧槚. 程序兼纳集:由力迫描述的中介逻辑程序语义[J]. 中国科学(E 辑),1996,(6):567-573.

[164]Shi Qingsheng,Zhu Wujia. Model characters of medium temporal logic[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,1996,28(6):800-805.

[165]毛宇光,朱梧槚. 中介逻辑演算系统 MP^N 及 MF^N[J]. 模糊系统与数学,1999,13(2):45-51.

[166]毛宇光,徐洁磐. 用于不完全信息数据库的中介逻辑演算系统 MP^M[J]. 计算机科学,2001,28(8 增):365-368,412.

[167]毛宇光,徐洁磐. 用于不完全信息数据库的中介逻辑演算系统 MF^M[J]. 计算机科学,2001,28(9 增):144-148.

[168]顾红芳,白鹏,肖奚安,朱梧槚. MP* 与各种命题联结词含量完全的三值逻辑在语言表达能力上的等效性研究[J]. 数学杂志,2000,20(3):305-310.

[169]顾红芳,肖奚安,朱梧槚. 不完全三值逻辑在语言表达上的相互比较[J]. 模糊系统与数学,2001,15(1):28-33.

[170]潘正华. 中介谓词逻辑系统的 λ-归结[J]. 软件学报,2003,14(3):345-349.

[171]Pan Zheng Hua. An interpretation of infinite valued for medium propositional logic [C]. In:Proceedings of 2004 International Conference on Machine Learning and Cybernetics,2004,(4):2495-2499.

[172]Pan Zhenghua, Zhu Wujia. Strong Completeness of Medium Logic System. Journal of Southwest Jiaotong University,2005,13(2):177-181.

[173]曹汝鸣,毛宇光,陈文彬. 中介命题演算系统 MP^M 的公理完备集. 计算机科学,2006,33(2):151-154.

[174]潘正华. 中介逻辑:ML 的语法完全性[J]. 计算机科学,2006,

33(10):131-133.

[175]曹汝鸣,毛宇光,陈文彬.中介命题演算系统 MP^{M}的代数系统.数学研究与评论,2006,26(4):846-850.

[176]《现代科技综述大辞典》编委会.现代科技综述大辞典[M].北京:北京出版社,1998:7-10.

[177]《数学辞海》编委会.数学辞海(第四卷)[M].山西大学出版社,东南大学出版社,中国科学技术出版社,2002:97,36-38,188.

[178]《现代数学手册》编纂委员会.现代数学手册·近代数学卷[M].上海:华中科技大学出版社,2001:17-20,41-43.

[179]洪龙,肖奚安,朱梧槚.中介真值程度的度量及其应用(Ⅰ)[J].计算机学报,2006,29(12):2186-2194.

[180]洪龙,肖奚安,朱梧槚.中介真值程度的度量及其应用(Ⅱ)[J].计算机学报,2007,30(9):1551-1558.

[181]北京大学外国哲学史教研室,译,古希腊罗马哲学[M].北京:商务印书馆,1962.

[182]列宁.中共中央马、恩、列、斯编译局,译.哲学笔记.北京:人民出版社,1974:82.

[183]J. W. Dauben.康托的无穷的数学与哲学.郑毓信,刘晓力,译.南京:江苏教育出版社,1988:55-56.

[184]马克思.Hegel辩证法和哲学一般的批判.北京:人民出版社,1955.

[185]恩格斯.自然辩证法.北京:人民出版社,1955.

[186]黑格尔.Hegel的小逻辑.贺麟,译.北京:商务印书馆,1950.

[187]马克思.资本论第一卷.王亚南,译.北京:人民出版社,1954.

[188]中国科学院政治思想研究会选编.中国当代科学家锦言录.北京:科学出版社,1990.

[189]陈详硕,朱梧槚.黑格尔论消极无限与积极无限.南京大学学报社会科学版,1983,No2.

后 记

序言中有这样一段文字:“曾计划要写一本属于数学基础领域中关于无穷观之逻辑基础的书,但该书又必须从数学历史之源头上写起,因而在忙碌不堪的境况下,迟迟不能使计划实现,后来时机终于成熟,也终于有机会能完成计划并出版《数学与无穷观的逻辑基础》一书了.”

这里所谓“时机终于成熟”指的是:从 2000 年开始专注于研究数学无穷之逻辑基础之后,最近 8 年以来的相关研究,已经做出了一些结果,当时为知识产权计,先在国内高校学报一类杂志上以中文发表了 10 余篇文章,详见文献[143～154],而今又将有一批文章以英文发表在国外杂志上.只要不出现特殊的意外,实现这一计划已经为期不远.这说明我们已经积累了一批与写书相关的材料,因此可谓写书的时机终于成熟.又所谓“终于有机会”能实现出书之计划指的是:在 1991 至 1996 年间,我和肖奚安教授合作撰写并在南京大学出版社相继出版了《数理逻辑引论》、《集合论导引》和《数学基础概论》三本书,10 年后大连理工大学出版社决定将这三本书修订再版,从而萌发了就在《数学基础概论》一书的基础上,首先加以大幅删减那些没有紧密关系的内容,再适当进行文字修改,并将最近 8 年来关于数学无穷之研究结果与相关材料加以整理,并以写书的形式联结成书的体裁.如此就能在较短时间内从历史的源头下笔写出《数学与无穷观的逻辑基础》这本书了.现在终于利用这个机会实现了这一计划.相关改写、删除和增写的具体情况如下:

原书《数学基础概论》之章节为 5 章和 4 个附录,全书共 588 页,其中附录 2～4 共 340 页,占了全书一半以上(将近 2/3)的篇幅,在这次改写过程中基于两个原因将所说的附录 2～4 全部删除.其中之根本原因是其内容与要写的《数学与无穷观的逻辑基础》一书并无直接关系.其次的原因是这 3 个附录全部用形式语言陈述,其中包括中介逻辑演算和中介公理集合论的大批引理和定理的形式证明在内,也都是用形式斜形证明记法陈述的,从而一般说来,非专业读者难以在深层次上理解其内容与背景,何况相关领域的研究者或有此专长的读者可以查阅相关文献,并非必需阅读上述附录的系统陈述.基于上述之根本原因和次要原因,

将这些在内容上可留可不留的附录予以删除是有充分理由的. 但原书附录 1 的内容,实为本人于 1995 年在美国召开的"首届系统科学国际会议"上所作报告的中文版,又是以数学语言和科普语言陈述之综合报告,因此,经过适当删减和补充之后仍予保留,但作为第 5 章所论之中介系统的后续讨论,列为第 5 章 § 5(即 5.5)而陈述之. 原书其他章节亦有篇幅上的适度删减和文字上的少量修改.

在这里,有一个情况必须予以说明,那就是 1983 年以来,我和肖奚安教授长期合作研究,共同建立了中介逻辑演算和中介公理集合论系统,在整个合作过程中,学术观点一致,互信互让,合作愉快,并由此而结下了终身不忘的深厚友谊. 并如上文已经指出,原由南京大学出版社所出版之《数理逻辑引论》、《集合论导引》和《数学基础概论》三本书,也是我们共同合作撰写,并且联名出版,在这次修订再版过程中,前两本书没有内容上的大的更改,理所当然也联名再版. 但在数学无穷之逻辑基础的研究过程中,虽然我们也曾计划再度共同合作,但是后来发现,在若干基本观点上分歧很大,终于无法继续合作,他也无法真正认同《数学与无穷观的逻辑基础》一书的第三篇的相关内容,为之在该书出版时的署名问题,必须充分征求肖奚安教授的意见. 经过充分讨论之后,并在充分尊重肖奚安教授之意见的基础上,所达成的一致意见是:除了明确指出该书第 5 章(5.1～5.4)为肖奚安教授所撰写之外,也就不再联名出版《数学与无穷观的逻辑基础》一书了.

半个世纪以来,我的兴趣和精力可谓始终专注在数学基础这个领域之中. 例如早年与老师徐利治教授合作研究连续统假设之不可确定性[14～16](1956～1958),又如对西方数理哲学界流传甚久的抛球问题[5][126](1982～1987)和无穷值逻辑与概括原则相容与否问题[44,45]的探索(1984～1985),特别是 1983 年以来,我与肖奚安教授长期合作研究,共同建立和发展中介系统[82～105],直到 2000 年以来专注研究数学无穷之逻辑基础等等,全都归属于数学基础领域. 我们不说这些工作有何水平或价值,但也足以说明我的兴趣所在,同时也反映了我的知识面窄而不宽,更限于个人的能力与水平,使我思考问题难以跟着文献和潮流走,似乎只会跟着兴趣和问题走,并视其为治学与修身的第一要素. 我有 4 句话被收录在文献[188]中,其中有一句话说:"做人的原则是:人品第一,学问第二."当然,我也出过不少应急文章,其中甚至包括那些为了凑数而去展开中介系统的文章在内. 但这也是不得已而为之的事. 因为我在 1957 年就被错划为右派,从此沦为政治贱民,文化大革命中又被关进监狱,长达

10 年之久，直到 1978 年底才平反出狱，重新录用于南京大学数学系任教. 为之，我既然还有机会重新在高校执教，总不能一辈子当个老讲师吧！否则也太对不起改革开放时代的到来和那些为我平反冤假错案的前辈了. 但是每次晋升职称总要凑足一定数量的文章，还要有这样那样的奖状之类的东西，所以我在文化大革命之前，长期忙着当右派，文革期间又忙着坐牢，文革结束之后又忙着当教授，谁知当了教授以后比不当教授更加忙碌不堪. 诸如此类的情况都是我一直拖到 2000 年才下决心专注于思考无穷观问题的原因.

这里我要提到同窗好友陈祥硕，不仅他的思想境界一直是我的精神支柱之一，而且本书附录中部分内容取自我们所合作的一篇文章，即文献[189]. 在 2003 年底到 2004 年初的一段时间内，我终于办成了退休手续，拿到了退休证，我可以停招学生了，但还有几个博士生尚未毕业，学术界还有不少事要逐步减下来，总有一天我能全身心地去想、去做、去讲和去写我最有兴趣的东西. 这一天的来临也为时不远了. 在这里，我不敢说在我的余生中一定会做出什么重要的工作来，但我却敢说“生命不止，奋斗不息”这一点在我的余生中是一定能做到的. 因为莫说数学先辈们的治学态度和奉献精神时时都在鞭策我们，仅就几位在我心中留有深刻印记的大作家的伟大精神，就在永远教诲我必须这样去努力工作. 请让我简洁地陈述三位如下：

(1)曹雪芹　穷困潦倒没有压倒他，38 岁那年写出了《红楼梦》初稿，然而不可思议的深度打击接踵而来，《红楼梦》80 回书稿竟被一位朋友丢失了，永远没有找回来，接着妻儿突然相继病逝. 孤身一人的曹雪芹还是没有被击垮，决心从头重写，没日没夜地写，躺在病榻上还是爬起来继续写，直到 1763 年除夕之夜凄凉地离开人世，除了床头一堆没有写完的书稿之外一无所有.

(2)查尔斯·狄更斯(19 世纪英国大作家)　他从小苦不堪言，但他自强不息，终于成为一代大文豪. 到了晚年，自知留给他的时间不多了，因此加倍珍惜有生之年，日以继夜地去写他计划中的最后一部长篇小说《艾德文·杜鲁特疑案》. 由于年老体弱而又过度劳累，竟在写作中突然倒在桌子底下，永远闭上了双眼.

(3)安东尼·巴甫洛维奇·契诃夫(俄罗斯大作家)　1884 年毕业于莫斯科大学医学系，但在 1888 年就获得了第一流作家的地位，然而不幸地患上了肺病，不停地咳血. 他是医生，在那个年代自知康复不起来，从而他瞒着母亲和家人，装着没病的样子，更加不要命地抓紧时间创作，

一直抱病努力写作. 1904 年文艺界决定以上演他的剧本《樱桃园》来祝贺他 44 岁生日,但他却在上演的前几天,斜靠在病床上并在写作中永远离开了这个世界.

想到他们,当即自感渺小,其间差距何止千里,内心深处惭愧和自责都来不及,哪里还敢懈怠辜负好时光. 让我们记住莎士比亚的名言:"放弃时间的人也会被时间放弃". 愿与读者以此共勉.

在这里,我还想说几句长期思考基础问题之后的感悟之言,以供读者和有志介入基础领域研究工作的青年学者参考. 这就是:首先思维永远定势在传统层面上的人不宜从事基础理论研究,其中道理可谓不言自明;其次是任何一位从事基础理论的研究者,所必须具备的心理素质,至少有如下 4 点:

(1)勇于直面失败和勇于承受失败的压力,因为基础研究风险大.

(2)充分作好长时间投入和艰辛探索的思想准备,彻底远离急功近利的不良心态.

(3)善于在极端孤独和被人误解指责的环境中充满信心,时时牢记"人不自信谁信之"的古训.

(4)勇于追求真理并为真理奋斗不懈.

最后我还要借此机会更正我的出生年月. 我的实际出生年月是 1933 年 11 月 3 日(农历 9 月 16 日),但在 1955 年大学毕业时,我的档案中被错记为 1935 年 11 月 3 日. 虽多次提出纠正却难以实现,从而沿用至今,特此更正.

朱梧槚

2008 年 3 月 8 日

于南京江宁揽翠苑小区寓所

[General Information]
书名=数学与无穷观的逻辑基础
作者=朱梧槚著
页数=317
SS号=11977146
DX号=
出版日期=2008年03月第1版
出版社=大连理工大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一篇　几何基础
第1章　几何基础历史概要与公理化方法
1.1　Euclid《几何原本》与第五公设问题
1.2　Лобачевский 的信念和品质
1.3　Hilbert的Euclid几何公理系统
1.4　Лобачевский 几何公理系统
1.5　公理化方法
1.6　Лобачевский 几何公理系统的相对相容性证明
1.7　几何公理系统的独立性和完备性
第二篇　经典与非经典数学奠基问题
第2章　悖论与精确性经典数学的理论基础问题
2.1　古典集合论的诞生及其思想方法
2.2　何谓悖论
2.3　数学危机
2.4　二值逻辑悖论举例
2.5　非欧几何与数学基础问题
第3章　逻辑数学悖论在精确性经典数学中的解释方法
3.1　Zermelo对悖论的解释方法
3.2　Russell-Ramsey对悖论的解释方法
3.3　N（з ≤n<ω）值逻辑悖论与无穷值逻辑悖论
3.4　悖论的成因与研究悖论的意义——G?del不完备性定理与悖论
第4章　数学基础诸流派
4.1　逻辑主义学派
4.2　直觉主义学派
4.3　历史的误解
4.4　Hilbert主义学派
4.5　形式主义学派
4.6　关于Hilbert主义学派与形式主义学派的数学真理观
第5章　关于模糊数学的理论基础问题
5.1　模糊性与模糊数学
5.2　奠基于精确性经典数学之上的模糊数学
5.2.1　模糊拓扑
5.2.2　模糊代数
5.3　ZB公理集合论系统
5.4　中介数学系统
5.4.1　两种谓词的划分与定义
5.4.2　集合的运算
5.4.3　谓词与集合

5.4.4 小集与巨集
5.4.5 MS与ZFC之间的关系
5.4.6 逻辑数学悖论在MS中的解释方法
5.5 从计算机科学与数学研究的角度看中介系统的发展
5.5.1 中介系统目前的发展概况
5.5.2 中介系统的哲学背景
5.5.3 中介系统的思想原则
5.5.4 数学研究对象的再扩充
5.5.5 概括原则的修改问题
5.5.6 经典数学系统和中介数学系统之间的关系
5.5.7 中介系统在计算机科学中的应用前景
第三篇 无穷观问题探索
第6章 数学无穷与数学基础
6.1 两种无穷观的区别和联系
6.2 数学系统对两种无穷观的兼容性
6.3 数学系统中的一对互相矛盾的隐性思想规定
6.3.1 隐性思想规定之一
6.3.2 隐性思想规定之二
6.3.3 两点注记
6.4 Cantor-Zermelo意义下的无穷集合概念的自相矛盾性
6.4.1 简记与注释
6.4.2 可数无穷集合的不相容性
6.4.3 ZFC框架中的不可数无穷集合的不相容性
6.4.4 若干相关的历史性直觉判断
6.5 再论古典集合论与近代公理集合论中之无穷集合概念的矛盾性
6.5.1 弹性集合与柯西（Cauchy）剧场
6.5.2 古典集合论与近代公理集合论中的狭义柯西剧场现象
6.5.3 超穷弹性集合与超穷柯西剧场
6.5.4 ZFC框架下的超穷柯西剧场现象
6.6 对角线方法中的“每一”与“所有”
6.7 分析基础中的无穷观问题
6.7.1 微积分与极限论的简要历史回顾
6.7.2 简记与注释
6.7.3 关于极限表达式的可定义与可实现概念
6.7.4 分析基础中的新贝克莱悖论
6.8 非直接使用poi与aci观念下的自然数系统的不相容性
6.8.1 注释与简记
6.8.2 恰由全体自然数构成之集合的不相容性证明
6.8.3 续论与说明
第7章 潜无限数学系统与重建实无限数学系统的构想
7.1 潜无限数学系统（Ⅰ）——预备知识
7.1.1 预备知识之一——背景世界的划分原则
7.1.2 预备知识之二——关于构建潜无穷数学系统的几点说明

7.2　潜无限数学系统（II）——逻辑基础之形式系统
7.2.1　PIMS命题逻辑的自然推理系统PPIN
7.2.2　PIMS谓词逻辑的自然推理系统FPIN
7.3　潜无限数学系统（III）——逻辑基础之元理论
7.4　潜无限数学系统（IV）——集合论基础
7.5　谓词与无穷集合之间的无穷观问题
7.5.1　数集与区间中变量趋向极限的表示法
7.5.2　实无穷刚性自然数集合与中介过渡
7.6　实无限刚性集合的内涵与结构
7.6.1　无穷背景世界中的谓词与集合之间的关系
7.6.2　无约束背景下的实无限刚性集合的结构模式
7.6.3　有约束背景下的实无限刚性集合的结构模式
附录　Hegel论消极无限与积极无限